UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Las Razones Trigonométricas: Una propuesta didáctica para su comprensión, a partir de un análisis histórico epistemológico.

Beatriz Alejandra Álvarez Bernal

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Medellín, Colombia

2018

Las Razones Trigonométricas: Una propuesta didáctica para su comprensión, a partir de un análisis histórico epistemológico.

Beatriz Alejandra Álvarez Bernal

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director

Diego Esteban Agudelo Suárez

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Medellín, Colombia

2018

Agradecimientos

El estar en un mundo tan cambiante hace que se despierte la necesidad de prepararse académicamente para mejorar el desempeño laboral y así generar económicamente mejores ingresos.

Pero en esta búsqueda de capacitación siempre hay quien debe ceder su espacio y tiempo para que puedas alcanzar tus logros. Irónicamente son los mismos que te apoyan y motivan para que no te rindas en el camino. Por eso mi corazón está lleno de gratitud a mi mamá Ángela Bernal y a mi papá Argemiro Álvarez, quienes motivan mi crecimiento intelectual; a mis hijos Santiago y Nicolás Alarcón Álvarez, quienes son mi polo a tierra; y a Sergio Alarcón Vasco, que ha estado siempre a mi lado haciendo mi trayecto por la maestría más amable.

Resumen

Se presenta el diseño de una propuesta didáctica para facilitar la comprensión del concepto de razón trigonométrica, tomando como herramienta básica para su construcción el estudio del desarrollo histórico epistemológico del concepto. La intervención, que se desarrolla con los estudiantes del grado 10°1 de la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro, ubicada en el municipio de Medellín, comprende tres etapas. En la primera etapa se aplica a los estudiantes una prueba diagnóstica para indagar sobre el conocimiento que tienen de los conceptos previos, necesarios para la construcción del concepto de razón trigonométrica. La segunda etapa es el diseño y la aplicación de la propuesta didáctica, la cual está conformada por cuatro secuencias y con las que se busca que los estudiantes construyan los conceptos fundamentales que llevan a la comprensión del concepto objeto de estudio. En la tercera etapa se aplica una prueba final, con la que se evalúa la efectividad de la propuesta. Por último, se presentan las conclusiones y algunas recomendaciones que surgen del análisis de la intervención.

Palabras clave: Razón trigonométrica, estudio histórico epistemológico, prueba diagnóstica, secuencias didácticas.

Abstract

The design of a didactic proposal is presented to facilitate the understanding of the concept of trigonometric ratio, taking as a basic tool for its construction the study of the epistemological historical development of the concept. The intervention, which took place with the students of the grade 10°1 of the Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro, located in the municipality of Medellín, which comprises three phases. In the first phase a diagnostic test was applied to the students to wise up knowledge they have of the previous concepts, necessary for the construction of the trigonometric ratio concept. The second phase is the design and application of the didactic proposal, which is made up of four sequences and which seeks to build in the students the fundamental concepts that lead to the understanding of the concept object of study. In the third phase a final test is applied, with which the effectiveness of the proposal is evaluated. Finally, the conclusions and some recommendations that arise from the analysis of the intervention are presented.

Keywords: trigonometric ratio, historical epistemological study, diagnostic test, didactic sequences.

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág

Introducción

Las metodologías de enseñanza tradicionales, basadas en procedimientos expositivos y rutinarios, sigue siendo el modelo a seguir por los docentes de matemáticas en la mayoría de las instituciones educativas. Este tipo de instrucción no permite una participación activa del estudiante en su proceso de aprendizaje, ocasionando que se presenten dificultades de tipo cognitivo y formal que pueden causar retrasos en dicho proceso. De tipo cognitivo, porque retrasan los procesos mentales que llevan a la buena comprensión de los conceptos y propiedades matemáticos, como por ejemplo el desarrollo de competencias heurísticas y de pensamiento, que les ayuda en la solución de problemas y que los hace individuos propositivos, argumentativos y analíticos. De tipo formal, porque hacen ver las matemáticas no como una estructura, sino como un conjunto de datos y procedimientos sin relación alguna, lo cual impide que se vea la secuencialidad de los conceptos matemáticos, necesaria para el afianzamiento y la comprensión de los nuevos por aprender. En efecto, los conceptos nuevos se construyen a partir de anteriores ya aprendidos.

A esta problemática no es ajena la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro. Cuando los estudiantes llegan al grado 10°, por ejemplo, y “aprenden” en trigonometría el concepto de razón trigonométrica, este es presentado de manera mecánica y aislado de conceptos como razón, proporción, triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras que, se supone, son necesarios para construirlo de manera satisfactoria. Esta falta de relación o secuencialidad con los demás conceptos hace que no lo comprendan, lo que lleva a que lo olviden fácilmente o no sepan aplicarlo en situaciones específicas.

Se hace necesario, por tanto, el diseño de una propuesta didáctica que facilite la construcción del concepto de razón trigonométrica, que tenga presente los conceptos previos necesarios para su construcción, y donde el estudiante sea protagonista de este proceso. Es así, como se piensa en una propuesta didáctica para la comprensión de las razones trigonométricas, a partir de un análisis histórico epistemológico del concepto.

En efecto, la historia y la epistemología son instrumentos de gran valor para el logro de este objetivo. Partiendo del hecho de que la evolución histórica y epistemológica de un concepto es la misma que se presenta en el aula (Delgado, 2003), y que las dificultades que presentaron los matemáticos durante el proceso del desarrollo histórico de un concepto son las mismas que presentan los estudiantes durante el proceso de construcción del concepto (Bachelard, 1993; Delgado, 2003), la historia y la epistemología se convierte en una herramienta de gran poder para el diseño de situaciones didácticas que faciliten al estudiante la construcción de los conceptos matemáticos, en particular de las razones trigonométricas.

Esto, además de permitir el desarrollo mental, permite también que se estudie los conceptos desde sus inicios, cómo van evolucionando, para luego, mirar la secuencialidad de los conceptos previos necesarios para la comprensión del mismo. Así mismo permite desde lo social estudiar los aspectos de tipo ético y psicológico, entre otros, por lo que pasaron los matemáticos en esos momentos.

1. CAPITULO I: DISEÑO TEÓRICO

1.1 Planteamiento del Problema

1.1.1 Descripción del Problema

Hoy día sigue siendo común, en algunas instituciones educativas de la ciudad de Medellín, ver a los docentes del área de las matemáticas utilizar métodos tradicionales para que sus estudiantes interioricen los conceptos propios de dicha área. Esta metodología, basada en procedimientos memorísticos y repetitivos, impide que el estudiante participe en la construcción de los conceptos, retrasando la comprensión de los mismos.

La trigonometría, no es ajena a este tipo de metodología; los conceptos, en su mayoría, son introducidos por el docente de manera arbitraria, sin construir el concepto y sin darle claridad al estudiante sobre el origen, significado o desarrollo histórico del mismo. Este es el caso de las razones trigonométricas, donde son definidas a partir de su relación con las partes de un triángulo rectángulo. Esta definición, que es lo único que se presenta al estudiante, es muy limitada ya que, como se dijo antes, no se construye. Sumándole a esto que los estudiantes no relacionan el teorema de Pitágoras con el triángulo rectángulo y las razones trigonométricas y el supuesto de algunos docentes que de los grados anteriores el estudiante debe “recordar” los conceptos antes vistos sin importar el tiempo que haya transcurrido, para volverlos a poner en práctica.

En la Institución Educativa Juvenil Nuevo futuro, los estudiantes, dentro del plan de área de matemáticas del grado octavo, estudian el Teorema de Pitágoras y las propiedades del triángulo rectángulo. Sin embargo, no puede decirse que hayan construido y adquirido habilidades que les permitan aplicarlos a distintos tipos de situaciones por la falta de continuidad y relación del aprendizaje o la comprensión del teorema de Pitágoras y sus relaciones con los conceptos de las razones trigonométricas. Además, en el grado noveno estas propiedades no son retomadas por los profesores del curso, lo cual lleva a que lo olviden de manera rápida, creando vacíos conceptuales que pueden retrasar el proceso de construcción de los conceptos de la trigonometría, explícitamente de las razones trigonométricas propias de las matemáticas del grado décimo.

Por este motivo se requiere una propuesta didáctica que intervenga el grado décimo, que permita al estudiante ser protagonista en la construcción de su pensamiento matemático, particularmente en los conceptos de las razones trigonométricas, que le permita desarrollar los tipos de pensamiento matemático propios de esta área (espacial - geométricos y variacional - algebraicos y analíticos) y las competencias de pensamiento.

1.1.2 Formulación de la pregunta

En los estudiantes del grado décimo de la institución educativa Juvenil Nuevo Futuro, ¿Cómo contribuyen la historia y la epistemología para la comprensión de los conceptos de las razones trigonométricas?

1.2 Justificación

Después de que se construyen los conceptos matemáticos estos deben ser reforzados de manera continua, paulatina y progresiva, para que puedan ser afianzados por parte de los estudiantes, de tal forma que no sean olvidados. Este proceso debe hacerse también de manera secuencial durante los cursos posteriores, ya que muchos de los contenidos de las asignaturas nuevas necesitan de ellos como conocimientos previos para iniciar el proceso de aprendizaje. Esta secuencialidad puede observarse en los contenidos de las mallas curriculares de la Secretaría de Educación de Medellín, en el plan de área de matemáticas, donde para el grado octavo se presentan las propiedades del triángulo rectángulo, que incluye el teorema de Pitágoras, y en el grado 9º se continua con el fortalecimiento de dichos conceptos (Secretaria de Educacion de Medellin, 2014). Estas propiedades, aunque son necesarias en el grado décimo para iniciar el tema de trigonometría, la autonomía que se permite a las instituciones educativas en cuanto a su diseño curricular hace que muchas veces no sean tenidas en cuenta dentro del plan de área para el grado noveno.

Este es el caso de la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro, donde en la malla curricular para el grado noveno no está planeado continuar con el fortalecimiento de los conceptos aprendidos en octavo y que son necesarios para el grado décimo (Garcia, Freddy & Burgos, Sergio, 2018).

Se hace necesario entonces el diseño de una estrategia didáctica que permita al estudiante ser protagonista dentro su proceso de aprendizaje, participando en la construcción de los conceptos necesarios para su formación matemática, y que propicie, además, un mejoramiento en su desarrollo intelectual y en la adquisición de competencias de pensamiento, haciéndolo un individuo propositivo, argumentativo, analítico e interpretativo, herramientas necesarias, no sólo en su formación académica, sino en su rol como individuo partícipe de una sociedad. Igualmente, la propuesta didáctica debe permitir al docente evidenciar errores de tipo conceptual, que son consecuencia de conceptos mal aprendidos, que pueden retrasar u obstaculizar su aprendizaje.

Cuando se estudian la historia y la epistemología de las matemáticas puede hacerse un rastreo de la manera cómo han sido desarrollados los conceptos o propiedades matemáticos desde sus inicios hasta nuestros días. Además, el estudiar las dificultades y obstáculos que tuvieron los matemáticos durante este proceso y la forma como las superaron puede ayudar a superar las mismas dificultades si se presentan en los estudiantes durante el aprendizaje de los mismos.

Esto hace, por lo tanto, que la historia y la epistemología de las matemáticas sean herramientas de gran valor para el diseño de estrategias didácticas para la construcción de los conceptos, en particular de la trigonometría (Adùriz-Bravo, 2010; Bachelard, 1993; Sierpinska, 1985).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar una propuesta didáctica a través de un análisis histórico y epistemológico que favorezca la comprensión de los conceptos de las razones trigonométricas en los estudiantes del grado décimo.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar un diagnóstico sobre los saberes previos que tienen los estudiantes acerca del triángulo rectángulo, teorema de Pitágoras, el cuadrado y su área, proporciones y razones.

- Diseñar a partir del rastreo histórico - epistemológico una secuencia didáctica que fortalezca en los estudiantes la construcción de los conceptos de las razones trigonométricas.

- Aplicar la propuesta a un grupo experimental del grado decimo.

- Evaluar la eficacia de la propuesta mediante la comparación del resultado de la prueba diagnóstica y el resultado de la prueba final.

1.4 Marco Referencial

1.4.1 Referente Antecedentes

A continuación, se desarrolla una relación con algunos autores que han abordado el tema objeto de estudio, de esta manera se permite indagar sobre la pertinencia que tiene la propuesta didáctica dentro del estudio de la enseñanza de la trigonometría, en particular del estudio de las razones trigonométricas.

Montiel (2013), en su libro "Desarrollo del pensamiento trigonométrico" comienza haciendo un recorrido a la educación oficial en México, desde donde se plantea el problema del aprendizaje de la trigonometría, es decir, la manera cómo influye el contexto en su aprendizaje. A continuación, presenta una investigación didáctica donde explica cómo los métodos de enseñanza permiten alcanzar o no cierta comprensión, sugiriendo la modelación y diseño de actividades didácticas. Finalmente propone una construcción basada en conceptos y prácticas, haciendo énfasis en la construcción de la relación y la funcionalidad trigonométrica, y sus respectivos desarrollos del pensamiento geométrico-proporcional y analítico – funcional.

Morales (2017), en el artículo titulado "Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría: Uso de un teodolito casero para medir ángulos de elevación y depresión y la aplicación de la ley de senos" propone una estrategia didáctica para lograr un aprendizaje significativo en la enseñanza de la trigonometría, basada en la utilización de un teodolito casero con los estudiantes del noveno nivel del Liceo Laboratorio Emma Gamboa, de Costa Rica. Esta metodología, a diferencia de la metodología tradicional que es de tipo pasiva y que no permite ningún esfuerzo mental, captó el interés de los estudiantes en una aplicación de la Trigonometría muy común en la vida cotidiana logrando un aprendizaje significativo. Dichos resultados permitieron plantear una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría que puede servir de base para otros profesores.

Caballero (2013) en su trabajo titulado “Una Transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de matemáticas” presenta una propuesta didáctica con la que busca aportar elementos disciplinares que permitan, a los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Distrital Las Violetas, de Usme Cundinamarca, un acercamiento conceptual de estas dos ramas de las matemáticas. Considera que si se hace un estudio de la historia de la astronomía se pueden generar situaciones didácticas que apoyen de manera satisfactoria las clases de trigonometría, involucrando en ellas el uso de materiales y problemas (históricos – epistemológicos) que pueden ser contextualizados, generando en los estudiantes la necesidad de construir conjeturas a través de la interacción en grupos y el uso de diferentes representaciones.

Matta (2014), en su trabajo “GeoGebra como herramienta para la enseñanza de Razones Trigonométricas en grado Décimo en la IED Leonardo Posada Pedraza” hace ver la importancia, para los profesores, del software de geometría dinámica GeoGebra como herramienta de apoyo para la enseñanza de la trigonometría. De esta manera, propone una estrategia didáctica, con los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Distrital Leonardo Posada Pedraza, de Bogotá Colombia, basada en el diseño de 5 applets que involucran temáticas de razones trigonométricas y gráficos de funciones trigonométricas, las cuales se alojaron en un blog diseñada para la propuesta.

Como puede observarse, los autores utilizan la historia de la trigonometría de forma general, como una manera de incentivar a los estudiantes, a que reconozcan su importancia en el desarrollo científico de la humanidad. Sin embargo, no la utilizan como herramienta didáctica en el diseño de situaciones que propicien la construcción de los conceptos básicos de esta área del saber, en particular en lo que tiene que ver con las razones trigonométricas, lo cual hace que la propuesta presentada en este trabajo de grado sea innovadora.

1.4.2 Referente Teórico

A continuación, se desarrollan los aspectos teóricos que apoyarán y validarán la propuesta del trabajo de grado. Serán tenidos en cuenta los principios de la corriente constructivista y los estudios de Delgado, Sierpinska y Adúriz-Bravo sobre un análisis histórico epistemológico con finalidad didáctica, donde hacen parte de estos los estudios de Bachelard sobre obstáculos epistemológicos. Igualmente, para el diseño de la propuesta didáctica, se tendrán en cuenta los principios de Chevallard sobre transposición didáctica y el trabajo sobre secuencias didácticas de Díaz Barriga.

De acuerdo con Pérez (2001), el constructivismo se preocupa en la manera como el individuo que aprende desarrolla su pensamiento, centrando su atención en los procesos de aprendizaje y en las dificultades que se presentan durante dicho proceso. Así, el individuo que aprende no se debe tomar como una caja vacía que se llena de información, sino que debe participar de manera activa en el proceso de construcción de su pensamiento. De esta manera, asegura Pérez, el constructivismo desde la docencia, mediante experiencias reiteradas, anima el aprendizaje activo del estudiante a partir de construcciones mentales, presentando desde diferentes puntos de vista un mismo concepto, favoreciendo su descubrimiento o reinvención mediante un proceso de abstracción reflexiva.

Para Delgado (2003), existe una relación entre la evolución conceptual en el aula y en la ciencia. De acuerdo con él la aproximación epistemológica en la matemática muestra la variación lenta del establecimiento de una noción, los problemas y los obstáculos presentados durante este proceso, y las dificultades de tipo conceptual que debieron ser superadas para alcanzar su solución.

Esto hace, por tanto, que la historia y la epistemología de las matemáticas se conviertan en una herramienta de gran valor a la hora de diseñar situaciones didácticas que favorezcan en el estudiante la construcción de su pensamiento matemático, ya que permiten comparar su proceso de aprendizaje de un concepto con su desarrollo a través de la historia. Así mismo, permite poner en evidencia obstáculos presentes durante dicho proceso.

Sierpinska (1985) ve la importancia de analizar obstáculos presentes en los alumnos durante la construcción de un concepto, estudiando la historia de éste, desde sus inicios y evolución. En efecto, los puntos de vista adoptados por los matemáticos del pasado, para el reconocimiento y superación de dichos obstáculos, pueden servir para reconocer y superar los mismos obstáculos, presentes en los estudiantes durante la construcción del concepto.

Antes de la formalización de un concepto los alumnos tienen ideas personales e intuiciones de la experiencia diaria que usan cotidianamente las cuales, luego de la adquisición del concepto, siguen presentes mezclándose con nuevos conocimientos haciendo que se modifiquen las ideas personales del alumno permaneciendo por largo tiempo hasta estados muy avanzados del aprendizaje, llevando muchas veces a que se cometan errores en la construcción del concepto

De esta manera, con el análisis histórico epistemológico se quiere estudiar la manera cómo se dieron los descubrimientos o como se ha desarrollado a través del tiempo un contenido o concepto disciplinar, reconociendo los aciertos y salidas en falso de los científicos durante dicho proceso. De acuerdo con Martínez y Poirier (2008) el análisis histórico epistemológico de un conocimiento científico debe tener por objetivo:

"Entender su naturaleza, su significado y sentido al determinar las causas que posibilitaron su aparición, identificar las diferentes etapas de su construcción en el ámbito científico, así como las condiciones de sus transformaciones sucesivas hasta llegar al aula como objeto de enseñanza."

De esta manera, según Agustín Adùriz-Bravo (2010), un análisis histórico epistemológico con finalidad didáctica debe concentrarse en los siguientes principios:

- Cómo llega a ser lo que es un determinado campo conceptual, estudiando su génesis, su evolución y su desarrollo, así como sus relaciones con otros campos conceptuales y las demás actividades humanas.
- Las dificultades principales que aparecieron en la constitución de dicho campo conceptual.

Este último principio hace ver la importancia del estudio de los obstáculos epistemológicos presentes durante el proceso de construcción o desarrollo de un campo conceptual. De acuerdo con Bachelard (1993), el conocimiento se desarrolla a partir de obstáculos, y son estos obstáculos los que permiten que se avance dentro del proceso de la construcción científica. Además, estos obstáculos son evidenciados a partir de los errores recurrentes de los alumnos, por lo que deben estar siempre presentes en todo proceso de formación. De ahí, la importancia de estudiar los conceptos previos de los alumnos, ya que una errada comprensión de éstos puede traer dificultades en la construcción del concepto objeto de estudio

Es importante hacer ver también, la importancia del principio de transposición didáctica de Chevallard (2002), el paso del saber sabio, o saber propio de un conocimiento científico, al saber enseñado. En el sentido de como a partir del estudio histórico y epistemológico de un concepto o propiedad se puede hacer la transposición en el aula, con el diseño de una situación didácticas que favorezcan su construcción a la manera como será presentado para su aprendizaje dentro del aula.

El proceso de transposición didáctica, que permite pasar del estudio histórico epistemológico del concepto de razón trigonométrica se desarrolla en el aula a partir de un trabajo con secuencias didácticas. De acuerdo con Díaz (2013), las secuencias didácticas son actividades con las que se ayuda a los alumnos a desarrollar competencias de manera óptima o a adquirir conocimientos nuevos. Para que se genere una secuencialidad lógica, completa y ordenada el docente debe tener un conocimiento adecuado de lo que va a enseñar, teniendo en cuenta dos elementos fundamentales: La secuencia de actividades para el aprendizaje, que debe enfocarse en una planeación dinámica la cual debe tener en cuenta los factores de intervención, que son los conceptos, objetivos y recursos, entre otros; y el proceso de evaluación, que debe hacerse de manera permanente.

1.4.3 Referente Conceptual

La trigonometría, en particular las razones trigonométricas, han sido utilizadas desde la antigüedad como herramientas de apoyo en las actividades cotidianas del hombre. Los egipcios y babilonios, por ejemplo, las utilizaron en la medición de áreas y en sus construcciones. Un vestigio de este uso es el papiro de Ahmes o el papiro de Rhind, en los egipcios, y la tabla de Plimpton 322, en los babilonios, donde aparecen ternas pitagóricas. Luego, con los griegos, al hacerse una disciplina formal, su uso se fue generalizando a otras ciencias, inicialmente en la astronomía, la arquitectura y en el transporte marítimo, este último con el desarrollo de instrumentos de medición como el astrolabio. Hoy día se sigue utilizando en distintas áreas científicas. Algunas de ellas son las siguientes: La arquitectura, en la creación de planos para medir con exactitud los ángulos de cada pared y columna; en la astronomía, en técnicas de triangulación para la medición de estrellas próximas; en la medicina, para medir el ritmo cardiaco; en la topografía para la medición de terrenos; en la acústica, se usa mucho en trabajos de ondas, analizando la acústica en áreas específicas; igualmente en áreas como la aviación, las telecomunicaciones, la ingeniería civil, entre otras.

La trascendencia de la trigonometría es que no se habla solamente de triángulos y de razones, sino como las razones influyen en el trabajo con el cálculo y de la manera como se potencializan los siguientes pensamientos matemáticos (MEN, 1998)

Pensamiento espacial y sistema geométrico: es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas: Pretenden llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen en la construcción de los modelos geométricos y en las reacciones de los objetos externos a nuestras acciones. Los logros propuestos para los sistemas métricos van encaminados a acompañar a los estudiantes a desarrollar procesos y conceptos como la construcción de los conceptos de las magnitudes.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: En los lineamientos curriculares de Colombia se hace notar la importancia del desarrollo del pensamiento

variacional porque en las matemáticas se requiere de la secuencialidad de los conceptos para que haya una real comprensión de los mismos.

Estos pensamientos contribuyen a que el estudiante establezca una mirada crítica, reflexiva, demostrativa y propositiva que promueven transformaciones e innovaciones del individuo en el ser, saber y en el saber hacer.

De acuerdo con los lineamientos curriculares de Colombia (MEN, 1998) para el área de las matemáticas, las instituciones educativas, entre las que se encuentra la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro, el estudio de la trigonometría es de gran utilidad porque en este se tienen en cuenta los procesos y el contexto de los estudiantes para ayudarlos a desarrollar los conceptos, de los cuales se despliegan situaciones en las hace protagonista de este proceso. Lo cual debe evidenciarse, aseguran, en la resolución de problemas y en la aplicación de procedimientos matemáticos en los contextos productivo y social.

En este sentido, una buena comprensión de los conceptos trigonométricos es lo que se espera dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área de las matemáticas, lo cual se logra a partir de la construcción conceptual, donde el individuo que aprende se vuelve protagonista de su proceso de aprendizaje. Esto, además, permite a los docentes evidenciar errores en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, por conceptos mal aprendidos o aprendidos a medias.

1.4.4 Referente Legal (Normograma)

A continuación, se referencia el normograma desde el contexto nacional, internacional y regional enmarcando los lineamientos legales de la educación colombiana y documentos rectores en otros contextos.

<table>
<tr><th colspan="3">CONTEXTO NACIONAL</th></tr>
<tr><th>Norma</th><th>Descripción</th><th>Contexto</th></tr>
<tr><td>Constitución Política de Colombia (1991)</td><td>Art. 67: “La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura (…)"</td><td>La educación es un derecho fundamental cuyo objetivo es el desarrollo de capacidades y habilidades con las cuales las personas aporten al desarrollo de la sociedad y aprendan a vivir en comunidad.</td></tr>
<tr><td>Ley 115 de (1994). Ley General de Educación</td><td>Art.1: “La educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes”.

Art. 15: “Definición de educación Básica. La educación básica obligatoria corresponde a la identificada en el artículo 356 de la Constitución Política como educación primaria y secundaria; comprende nueve (9) grados y se estructurará en torno a un currículo común, conformado por las áreas fundamentales del conocimiento y de la actividad humana.”

Art. 20: “Objetivos generales de la educación básica. Son objetivos generales de la educación básica: …
c) Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.”</td><td>La educación forma de manera integral a todas las personas, no solo en el ámbito académico

Se definen los diferentes niveles en a educación pública y privada dependiendo del desarrollo cognitivo de los niños, lo que lleva a las diferentes necesidades en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Es una obligación de la educación el desarrollo y fortalecimiento de los procesos de pensamiento</td></tr>
<tr><td>Lineamientos Curriculares Matemáticas (1998)</td><td>En particular es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos.

El cálculo mental y la estimación dan una gran oportunidad a los alumnos para hacer más dinámicas las operaciones y para desarrollar ideas sobre relaciones numéricas. Concierne estimularlos para que exploren e inventen estrategias alternativas para el cálculo mental.</td><td>Expone conceptos de la enseñanza de las matemáticas, relacionadas con las actividades y estrategias de cálculo mental llevadas a cabo por las personas</td></tr>
<tr><td>Derechos Básicos de Aprendizaje V.2 (2016)</td><td>“Propone y desarrolla estrategias de estimación, medición y cálculo de diferentes cantidades para resolver problemas”</td><td>Muestra los niveles mínimos que se deben alcanzar durante el paso de los niños por la educación básica en diferentes aspectos y competencias</td></tr>
</table>

CONTEXTO INTERNACIONAL		
Norma	**Descripción**	**Contexto**
Convención sobre los derechos del niño. 1989	Art. 28. Los Estados Partes reconocen el derecho del niño a la educación y, a fin de que se pueda ejercer progresivamente y en condiciones de igualdad de oportunidades ese derecho, deberán en particular (…)	Aborda los acuerdos para garantizar todas las atenciones y acciones necesarias en pro de asegurar el bienestar de los pequeños.
Declaración mundial sobre educación para todos. 1990	Art.1. “Satisfacción de las necesidades básicas de aprendizaje”.	Aborda la educación y la importancia de reconocer que comienza desde el nacimiento y debe acompañarse efectivamente.
Foro mundial sobre la educación. 2000	Art. 6. “La educación es un derecho humano fundamental, y como tal es un elemento clave del desarrollo sostenible y de la paz y estabilidad en cada país y entre las naciones y por consiguiente, un medio indispensable para participar (…)”	Manifiesta la importancia de acoger la población menos favorecida en todos los aspectos enfocando los esfuerzos a la defensa y desarrollo de la educación.

CONTEXTO REGIONAL	
Norma	**Contextualización**
Plan de desarrollo departamental: Antioquia Pensando en Grande. 2016-2019	Destaca la importancia de la educación como el motor de la transformación para el departamento, en búsqueda de una mejor calidad de vida. Presenta a la educación asociada a la dignidad de la persona y a la realización del proyecto de vida.
Plan de desarrollo municipal: Medellín Cuenta con Vos. 2016-2019	Las políticas municipales buscan una educación incluyente, eliminando barreras. Se presentan estrategias inclusivas, metodologías flexibles y maestros formados para la diversidad.
Expedición currículo. “El Plan de Estudios de la Educación Básica Secundaria” 2014	El plan de estudios de la educación básica tiene como propósito orientar el trabajo a desarrollar al interior de las aulas basándose en los lineamientos curriculares y estándares ya existentes para el nivel. Dicha propuesta fue construida y consultada con docentes del municipio de las diferentes instituciones educativas con el fin de contar con sus experiencias según dichos sectores.

1.4.5 Referente Espacial

La población escolar ha estado conformada por niños, niñas y jóvenes de la ciudad de Medellín principalmente de los barrios Doce de Octubre, París y Santander, entre otros, Los estudiantes de esta Institución pertenecen a los estratos 1 y 2 que han elegido la institución por la formación integral impartida en la institución educativa. Éstos, en su mayoría, provienen de familias de escasos recursos y donde el núcleo familiar está conformado por abuelos, tíos, o madres solteras, que en su mayoría no han terminado sus estudios.

En el año 1996, la institución ofrece los grados: Transición y Sexto, este último grado que dependía directamente del Liceo Doce de Octubre. Lo cual da lugar a que, en el año 1997, la Escuela Integrada Mixta Doce de Octubre se convierta en el Colegio Doce de Octubre, a razón de la gestión del Consejo Directivo (Acta N° 12 del 14 de agosto de 1997) y el Honorable Concejo de Medellín (Acuerdo Municipal N° 03 de 1997) del momento. Nombre que se cambia mediante la resolución 16234 de noviembre 27 de 2002 por Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro, motivado por su similitud con el nombre de otra institución educativa del sector.

A la fecha la institución educativa ofrece los grados de Transición y Educación Básica (Resolución 7002 del 3 de agosto de 1999) y Educación Media Académica (Resolución 0490 de octubre 22 de 2004). Servicio educativo orientado a la formación integral de niños, niñas y jóvenes, que sean competentes en los diferentes escenarios en que se desempeñen como ciudadanos, sean escenarios académicos o sociales; mediante la implementación de estrategias metodológicas y evaluativas pertinentes con los momentos históricos que se han materializado a través de sus múltiples convenios con otras instituciones gubernamentales y no gubernamentales, proyectos y participaciones en eventos de la Comuna y la Ciudad, en general, de los cuales pueden mencionarse: “Delinquir no paga”, “Ritmos y Movimientos”, “La ciudad también educa”, “Olimpiadas del Saber”, “Medellín, la más educada”, “Taller de escritores”, “Caminamos seguros por los senderos de la vida”, “Líderes Siglo XXI”, JAICA entre otros.

Lo que quiere decir que los ciudadanos que se han formado en esta institución educativa, han alcanzado su formación profesional en las universidades públicas y privadas de la ciudad, como otros en instituciones de educación informal.

Desde sus inicios la institución educativa le ha apostado a la formación integral basada en el fortalecimiento de los saberes propios de las áreas obligatorias, los valores y la valoración de su ser, de los demás y su entorno. Formación integral que ha estado bajo las orientaciones de Directores de Escuela y Rectoras, según las leyes educativas del momento histórico.

La institución educativa ha atendido la población en dos jornadas académicas (mañana y tarde); y en la década del año 2000, se adoptaron los símbolos institucionales actuales, con la participación activa de la comunidad educativa. Lo que significa que la institución se proyecta a la comunidad gracias a su Misión y Visión, que son su impronta ante la sociedad y que no cuenta con instituciones anexas.

2. CAPITULO II: Diseño Metodológico

2.1 Enfoque

La “Maestría en Ciencias Exactas y Naturales” de la Universidad Nacional es una maestría en profundización, por lo que su orientación se dirige al diseño, elaboración y aplicación en el aula de propuestas que den respuesta a alguna problemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de conceptos de las Ciencias Naturales o de las Matemáticas, y que propicien en el estudiante un aprendizaje significativo. De acuerdo con lo anterior y a las características de tipo constructivista con que se pretende trabajar, y que permiten una participación activa del estudiante en su proceso de apropiación de los conceptos objeto de estudio, la propuesta se acomoda mejor en un enfoque de tipo cualitativo.

De acuerdo con Moreira (2002) un enfoque cualitativo centra su interés en la interpretación de los significados que dan a las acciones los sujetos en una realidad social, que se construye a través de una observación participativa y donde el docente-investigador es quien interpreta los fenómenos en interacción del sujeto con el medio a investigar, que en este caso es el aula de clase.

Este enfoque cualitativo, por sus características, permite un trato igualitario a cada individuo, por lo que es ideal para muestras pequeñas, permitiendo tener unos datos descriptivos a través de diferentes fuentes primarias que el docente en su rol de investigador construirá teniendo en cuenta un método inductivo y un diseño flexible, que le permite analizar y modificar lo establecido inicialmente a fin de obtener grandes mejoras.

Para encontrar mejoras en los procesos de enseñanza, de manera que se propicie un aprendizaje significativo en el aula, se implementa la metodología de investigación acción. De acuerdo con Kemmis y McTaggart (1988), la investigación acción se caracteriza por ser un proceso que se construye desde y para la práctica, mejorando esta última a través de su transformación y donde el sujeto participa en todas las fases del proceso de investigación para la mejora de sus prácticas, lo que requiere un análisis crítico de las situaciones.

2.2 Método

El método de este trabajo está formado por cuatro fases, que son: diagnóstico, plan de acción, evaluación y reflexión.

Diagnóstico. Se identificó el problema que se ha venido presentando en la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro y que retrasa el proceso de comprensión, por parte de las estudiantes, de los conceptos básicos de la trigonometría, en particular de las razones trigonométricas. Luego de haber identificado el problema se hizo la formulación de la pregunta y se enunciaron los objetivos generales y específicos. A continuación, se hace un estudio de referentes bibliográficos de aprendizaje, currículo y enseñanza, y también para llevar a cabo un análisis histórico y epistemológico sobre las razones trigonométricas.

Plan de acción. Las actividades que se realizaron para dar solución al problema identificado están relacionadas con el diseño de una propuesta didáctica para la comprensión de las razones trigonométricas, la cual se apoya en un análisis histórico epistemológico de dicho concepto. Estas actividades, están divididas en tres fases:
La primera fase es la aplicación de una prueba diagnóstica, la cual tiene como objetivo Indagar en los saberes previos que son necesarios para la comprensión de las razones trigonométricas.

La segunda fase está conformada por cuatro secuencias didácticas que están discriminadas de la siguiente manera:

Secuencia 1: triángulo rectángulo y Teorema de Pitágoras.

Secuencia 2: Razones y Proporciones I.

Secuencia 3: Razones y proporciones II.

Secuencia 4: Razones Trigonométricas.

Estas secuencias comprenden talleres y actividades evaluativas para la construcción y apropiación de los conceptos a aprender, se desarrollarán en su totalidad en la institución educativa, y comenzarán con la indagación de saberes previos ya que en el aprendizaje por descubrimiento guiado estos deben ser tenidos en cuenta. Las actividades de evaluación consisten en cuestionarios compuestos por diferentes tipos de pregunta, para dar respuesta o solución a situaciones en distintos contextos. Por último, se hace un cuestionario evaluativo final, para verificar la adquisición del aprendizaje de los conceptos por parte de los estudiantes.

Evaluación y reflexión. La intervención se analiza a partir de las categorías empleadas, Análisis y hallazgos de la Secuencia, análisis histórico, análisis de la transición del concepto del triángulo rectángulo a las razones trigonométricas y análisis didáctico, actividades de evaluación realizadas a los estudiantes y la prueba final, que darán cuenta de su aprendizaje; se analizan los resultados y se obtienen conclusiones. El docente debe reflexionar sobre las fortalezas y debilidades de la propuesta, como son los aspectos actitudinales de los estudiantes y la manera como se les presentan las actividades.

2.3 Instrumentos de recolección de la información

Esta propuesta se apoya en instrumentos de recolección de tipo primario y secundario. Dentro de las fuentes primarias se encuentra las siguientes:

Prueba de indagación de saberes previos. Es una actividad escrita que se aplica a los estudiantes, con el fin de dar una idea al docente del conocimiento previo de los estudiantes en relación con el problema planteado. Así, se comprende el contexto, evidenciando la presencia de obstáculos en los estudiantes, los cuales se manifiestan a partir de errores de tipo conceptual o procedimental, y que pueden retrasar el proceso de aprendizaje.

Propuesta didáctica. Es a partir de una secuencia didáctica y un conjunto de actividades (talleres, trabajos prácticos (empíricos), juegos interactivos y videos) propuestas por el docente para la construcción y apropiación de los conceptos a aprender por parte de los estudiantes.

Cuestionario evaluativo. Es un tipo de encuesta que se realiza de manera escrita, con preguntas enfocadas a la verificación de un aprendizaje adquirido.

En este trabajo las fuentes secundarias se centran en el rastreo histórico y epistemológico de los conceptos objeto de estudio, su génesis y desarrollo, hasta la manera como son presentados hoy en el aula. Este rastreo permite estudiar los obstáculos de tipo epistemológico presentes en los matemáticos durante la evolución del concepto y que pueden estar presentes en los estudiantes de hoy, durante su proceso de formación, y es la herramienta básica para el diseño de la propuesta de aprendizaje, de acuerdo a los tres principios de Adúriz-Bravo (2010) para hacer un análisis histórico epistemológico con finalidad didáctica. Por esto, se hace importante una búsqueda bibliográfica, basada en libros, artículos, tesis, entre otras.

2.4 Población y Muestra

La aplicación de la propuesta didáctica se hace a un grupo heterogéneo de 30 estudiantes del grado 10°1, el cual está conformado por 22 mujeres y 8 hombres, entre los 16 y 18 años de edad, de la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro, el cual es población y muestra. Cabe hacer notar que, aunque la institución cuenta con dos grupos del grado décimo, 10°1 y 10°2, sólo se obtuvo el permiso de las directivas para trabajar con un sólo grupo.

La intervención se llevará a cabo durante el segundo semestre del año 2018. La recolección y el análisis de la información se hacen a partir del estudio de los cuestionarios de la propuesta de aprendizaje, aplicados a los estudiantes.

2.5 Impacto

La manera como se desarrolla la propuesta de aprendizaje, permite al estudiante participar de manera activa en el proceso de construcción de los conceptos a aprender, facilitándole la comprensión de los mismos y propiciando el desarrollo de los pensamientos matemáticos, en particular, el espacial, métrico y variacional; así como el desarrollo de competencias de pensamiento, permitiéndole al estudiante establecer una mirada crítica, reflexiva, demostrativa y propositiva que promueva transformaciones e innovaciones del individuo en el ser, saber y saber hacer.

También se espera que la propuesta de aprendizaje se convierta en un modelo a seguir por otros docentes, en el que vean la importancia de un análisis histórico epistemológico para el diseño de situaciones didácticas no solo en el área de las matemáticas, sino además en las Ciencias Naturales.

2.6 Cronograma

En concordancia con lo anterior, se plantea el siguiente esquema de actividades para el desarrollo del proyecto, teniendo en cuenta su planeación, ejecución y análisis.

2-1. Tabla de planificación de actividades

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Caracterización	Realizar un diagnóstico sobre los saberes previos que tienen los estudiantes acerca del triángulo	1.1 Identificación del problema, formulación de la pregunta y objetivos. 1.2 Revisión bibliográfica sobre la génesis y desarrollo, a través de la historia, de las razones trigonométricas.

	rectángulo, teorema de Pitágoras, el cuadrado y su área, proporciones y razones.	1.3 Revisión bibliográfica de los documentos del MEN enfocados a los pensamientos matemáticos.
Fase 2: Diseño	Diseñar a partir del rastreo histórico - epistemológico una secuencia didáctica que fortalezca en los estudiantes la construcción de los conceptos de las razones trigonométricas.	2.1 Diseño y construcción de una prueba para indagar saberes previos. 2.2 Diseño y construcción de la propuesta de aprendizaje, aplicando las metodologías seleccionadas, con el fin de generar un aprendizaje significativo 2.3 Diseño y construcción de actividades para la construcción y apropiación de los conceptos a aprender por parte de los estudiantes. 2.4. Diseño y construcción de una prueba final, para verificar la adquisición del aprendizaje de los conceptos por parte de los estudiantes.
Fase 3: Intervención en el aula	Aplicar la propuesta a un grupo experimental del grado decimo.	3.1. Intervención de la estrategia didáctica de enseñanza propuesta (secuencias)

Fase 4: Evaluación	Evaluar la eficacia de la propuesta mediante la comparación del resultado de la prueba diagnóstica y el resultado de la prueba final)	4.1. Aplicación de una prueba al finalizar la implementación de la estrategia didáctica propuesta. 4.2. Análisis de resultados obtenidos al implementar la estrategia didáctica en los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro. 4.3. Concluir si la estrategia didáctica produce un cambio significativo en los conceptos y dar recomendaciones con respecto al tipo de estrategia propuesta

Tabla 1: Planificación de actividades

2-2. Cronograma de actividades

ACTIVIDADES	**SEMANAS**															
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Actividad 1.1	X	X	X													
Actividad 1.2			X	X	X											
Actividad 2.1					X	X	X									
Actividad 2.2							X	X	X							
Actividad 3.1									X	X	X					
Actividad 3.1											X	X	X			
Actividad 4.1													X	X	X	
Actividad 4.2															X	X

Tabla 2: Cronograma de actividades

3. CAPITULO III: Sistematización de la intervención

3.1 Diseño de prueba diagnóstica

Lo que se pretende con la prueba diagnóstica es analizar el nivel de conocimiento que tienen los estudiantes sobre los conceptos previos, necesarios para la construcción de las razones trigonométricas. De esta manera, si tiene una comprensión adecuada de estos conceptos y los interioriza, puede afirmarse que se encuentra en un nivel satisfactorio para poder desarrollar o construir las razones trigonométricas. De lo contrario, se encuentra en proceso (que falta profundizar más) o en un nivel insatisfactorio.

La prueba diagnóstica está diseñada para evaluar seis indicadores fundamentales para la comprensión de las razones trigonométricas:

- Indicador 1: Identifica el triángulo rectángulo y reconoce sus lados.
- Indicador 2: Identifica el Teorema de Pitágoras.
- Indicador 3: Comprende y aplica el Teorema de Pitágoras a situaciones en diferentes contextos.
- Indicador 4: Reconoce el cuadrado y halla su área.
- Indicador 5: Identifica y discrimina las razones y las proporciones.
- Indicador 6: Reconoce las diferencias que hay entre los elementos del conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.

Cada uno de los indicadores se valorará empleando una rúbrica (ver anexo 1) que permite ubicar al estudiante evaluado en uno de los tres niveles de logro que son:

Nivel I: Insatisfactorio

No hay aprendizaje de los conceptos evaluados o los han comprendido de manera errada.

Nivel II: En proceso

Existe un aprendizaje parcial de los conceptos.

Nivel III: Satisfactorio

Hay un aprendizaje de los conceptos y sabe aplicarlos.

Los indicadores anteriormente mencionados están presentes en la malla curricular de la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro desde el grado cuarto de primaria hasta el grado octavo, lo que sugiere una secuencialidad en la estructuración del conocimiento y apropiación de los conceptos matemáticos.

3.1.1 Resultado y análisis de la prueba diagnóstica

En la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro hay dos grupos del grado decimo, los cuales están divididos en 10°1, conformado por 30 estudiantes y 10°2, por 20 estudiantes. La prueba diagnóstica, que tuvo una duración de 55 minutos, equivalente a una hora de clase establecida institucionalmente, se realizó sólo al grado 10°1, en la cual se evaluaron los saberes previos que deben tener los estudiantes para poder lograr un aprendizaje real en Trigonometría, específicamente en razones trigonométricas.

A continuación, se hace el análisis de la prueba diagnóstica aplicada al grado 10°1 teniendo en cuenta cada indicador. (Ver anexo 2)

Desde un diagrama de barras el análisis puede verse de la siguiente manera:

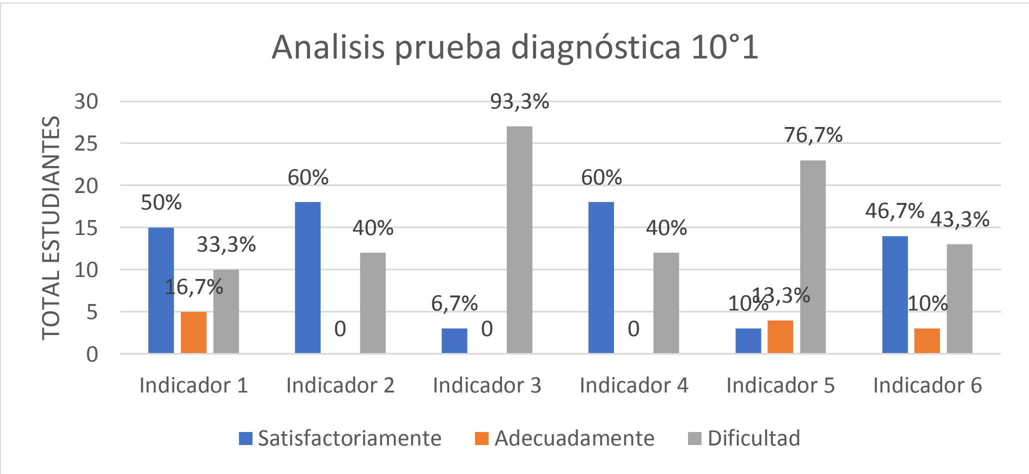


Figura 3: Resultado de la prueba diagnóstica de acuerdo con los indicadores

El análisis anterior en porcentaje de acuerdo a los indicadores puede verse de la siguiente manera:

Escalas		Indicadores	Porcentaje
NI Insatisfactorio	No hay aprendizaje de los conceptos evaluados o los han comprendido de manera errada.	1	16.7% (5 estudiantes)
		2	40% (12 estudiantes)
		3	93.3% (28 estudiantes)
		4	40% (12 estudiantes)
		5	76.7% (23 estudiantes)
		6	43.3% (13 estudiantes)
NII En proceso	Existe un aprendizaje parcial de los conceptos.	1	33.3% (10 estudiantes)
		2	0%
		3	0%
		4	0%
		5	13.3% (4 estudiantes)
		6	10% (3 estudiantes)
NIII Satisfactorio	Hay un aprendizaje de los conceptos y sabe aplicarlos.	1	50% (15 estudiantes)
		2	60% (18 estudiantes)
		3	6.7% (2 estudiantes)
		4	60% (18 estudiantes)
		5	10% (3 estudiantes)
		6	46.7% (14 estudiantes)

Tabla 3: Resultado de la prueba diagnóstica de acuerdo a los indicadores

En síntesis lo que se evidenció con la prueba diagnóstica es que existen debilidades en los conceptos previos necesarios para la construcción de los conceptos de las razones trigonométricas debido quizá a que al estudiante no se le construye el concepto, sino por el contrario se le dan los conceptos para que los memorice, lo que permite primero que no se aprenda de la manera pretendida por el docente, segundo que no lo recuerde a largo plazo, porque cuando se aprende de memoria se olvida de manera rápida. Entonces lo que se sugiere antes de intentar construir el concepto de razones trigonométricas es aplicar una secuencia de aprendizaje que facilite en el estudiante la comprensión de los conceptos necesarios que son importantes en la construcción de las razones trigonométricas, las cuales son el triángulo rectángulo y sus partes, el teorema de Pitágoras, el área del cuadrado, las razones y las proporciones. Luego que el estudiante haya hecho una construcción de los conceptos anteriores se puede decir que está en la capacidad de construir y comprender las razones trigonométricas.

3.2. Diseño de las secuencias didácticas

El estudio histórico epistemológico de los conceptos y propiedades matemáticos es una herramienta de gran valor a la hora de diseñar situaciones didácticas que faciliten su comprensión (Adùriz-Bravo, 2010; Bachelard, 1993; Sierpinska, 1985). Es así como para cada uno de los conceptos y propiedades necesarias para la construcción del concepto de razón trigonométrica se hizo también un análisis de este tipo, dando como resultado las secuencias que se presentan a continuación:

Secuencia 1: Triángulo rectángulo y Teorema de Pitágoras

El objetivo de esta secuencia es la comprensión del Teorema de Pitágoras y su aplicación a diferentes contextos.

Se tomó como primera secuencia, porque para el trabajo principal que son las razones trigonométricas, parten de la base del estudio del triángulo rectángulo.

La secuencia siguió el mismo proceso del desarrollo histórico del concepto; desde un trabajo empírico con las Ternas Pitagóricas desarrollado por los babilonios y los egipcios y los primeros pitagóricos, hasta su formalización como teorema por los mismos pitagóricos y matemáticos posteriores, teniendo en cuenta que el fin último no es la demostración del teorema, sino la comprensión del mismo desde lo numérico y geométrico, a partir de mostraciones.

De esta manera, la secuencia se divide en dos actividades. La actividad uno “Ternas Pitagóricas”, comprobando empíricamente el Teorema de Pitágoras y se comprueba que los triángulos que cumplen las Ternas Pitagóricas son rectángulos. La actividad dos “Rompecabezas del teorema de Pitágoras”, es una mostración para los estudiantes con la que ellos comprueban el Teorema de Pitágoras guiándolos hacia la deducción formal o general del Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$ Se comprueban, además, la Ternas Pitagóricas de la actividad uno con esta fórmula.

Secuencia 2: Razones y Proporciones.

El objetivo es identificar y discriminar las razones y proporciones porque son el tema general que hay que conocer para poder trabajar particularmente las razones trigonométricas, es decir, porque las razones trigonométricas son un caso particular de las razones.

Esta secuencia se divide en dos actividades. La actividad uno consiste en adaptar una situación trabajada por Eudoxo.

Introducir a partir de una combinación de la aritmética de escalas con la geometría de la línea dividida el concepto de razón, para esto se tomó el famoso problema de “Los pasos del gigante y el enano”.

En la actividad dos los estudiantes aprenden, discriminan e identifican a partir de diferentes situaciones los conceptos de razones y proporciones.

Secuencia 3: Razones y Proporciones.

Esta secuencia es una continuación de la secuencia 2, donde se trabajan las razones y proporciones, pero ya aplicándola a triángulos rectángulos, como una introducción o acercamiento a las razones trigonométricas.

Secuencia 4: Razones Trigonométricas.

A partir de los conocimientos adquiridos de las razones y proporciones se introduce el concepto de razón trigonométrica desde el círculo unitario. Además, se pretende que el estudiante comprenda la relación de estas razones en el círculo y el grafico de ella. Lo cual en un futuro le permitirá diferenciar entre razón trigonométrica y función trigonométrica.

3.2.1. Análisis y hallazgos de la secuencia

3.2.2. Análisis Histórico

La evolución que ha tenido un concepto matemático desde su concepción hasta su formalización, y las dificultades o aciertos que pudieron tener los matemáticos en este proceso, pueden ayudar en el diseño de estrategias didácticas que, aplicadas a los estudiantes, pueden hacer más fácil su comprensión (Adùriz-Bravo, 2010; Sierpinska, 1985; Vygotsky, 1986). No ajenos a este hecho, el estudio histórico-epistemológico de las razones trigonométricas se convirtió, en este trabajo, en una herramienta de gran importancia para el desarrollo y aplicación de las secuencias didácticas. A continuación, se hace un análisis de este estudio y su papel en cada una de las secuencias.

Para el diseño de la secuencia 1 se tuvieron en cuenta las características del desarrollo histórico epistemológico del teorema de Pitágoras, partiendo de un conocimiento empírico de éste y guiando a los estudiantes, paulatinamente, hacia su conocimiento formal. En este sentido el análisis histórico epistemológico parte de los estudios empíricos sobre ternas pitagóricas desarrollados por civilizaciones antiguas. Sobresale la civilización babilónica, cuyo trabajo se ve plasmado en los descubrimientos arqueológicos de las tablillas Yale y Plimpton 322. Igualmente, la civilización egipcia, con los llamados “triángulos egipcios” y la civilización india; con los “Sulvasutras”. Es importante resaltar que los egipcios e indios utilizaban cuerdas para medir y trazar líneas perpendiculares para las ternas, de ahí que “Sulvasutra” significara “manual de las reglas de la cuerda” (Gonzalez Urbaneja, 2008).

De esta manera, la secuencia comenzó dándole a los estudiantes los siguientes materiales de trabajo: lana, puntillas, metro, transportador y cartón paja. A continuación, se les entregó algunas ternas pitagóricas y se les pidió que con la lana y las puntillas construyeran, en el cartón paja, triángulos cuyas longitudes de los lados son dichas ternas. Se les informó además que cada unidad equivale a 10 centímetros en el metro, así, por ejemplo, 30 centímetros equivalen a tres unidades. Luego de construir el triángulo se les pidió que, con ayuda del transportador midieran el ángulo formado por los dos

lados más cortos. Con este ejercicio los estudiantes comprueban de manera empírica que los triángulos cuyas longitudes son estas ternas pitagóricas son triángulos rectángulos.

Cabe resaltar que al igual que los babilonios y los egipcios los estudiantes no tenían el conocimiento del teorema de Pitágoras, por lo que sólo comprobaron que los triángulos construidos con las ternas dadas eran rectángulos. (Ver figura 2)

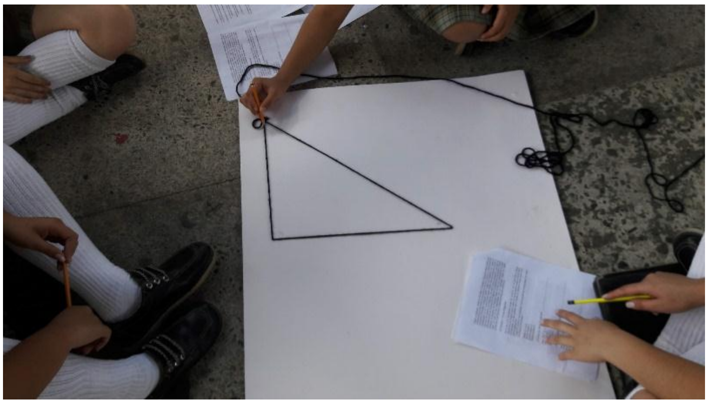


Figura 2: Estudiantes construyendo triángulos rectángulos con ternas pitagóricas dadas.

Pitágoras habría dado una prueba empírica del teorema que lleva su nombre basado en disecciones de cuadrados. La idea era demostrar que el cuadrado inscrito sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados inscritos sobre los catetos del mismo triángulo, lo que se conoce como Teorema de Pitágoras. Con el pasar de los años las pruebas del teorema de Pitágoras basadas en disecciones o rompecabezas se hicieron populares en las matemáticas sobresaliendo, además de la establecida por Pitágoras, la de Thabit Ibn Qurra (826-901), Bhaskara (1114-1185), Anaricio – Göpel (1824) y Perigal (1830) (Gonzalez Urbaneja, 2008). Este tipo de pruebas son muy importantes porque permiten desde lo visual una fácil comprensión de este teorema.

El paso a seguir en la secuencia es, por tanto, la comprensión, por parte del estudiante, del Teorema de Pitágoras, a partir de rompecabezas que ayudan, desde lo visual, a dicha comprensión. Para esto, se tomó como ejemplo la demostración hecha por Anaricio – Göpel en 1824. (Ver figura 3)

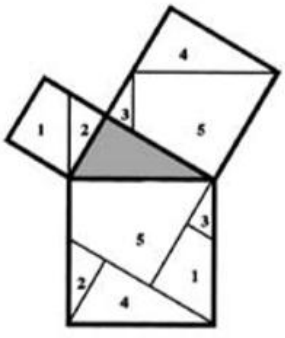


Figura 3: Rompecabezas Anaricio - Göpel

Para esta demostración se dio al estudiante un triángulo rectángulo y un cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo, además, de cinco piezas. Primero se les pidió a los estudiantes que construyeran con estas cinco piezas cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo dado (ver figura 4). A continuación se les preguntó a los estudiantes: “Si la longitud de un cateto es a y la del otro cateto es b, ¿cuáles serían las áreas de los cuadrados construidos sobre dichos lados?” para lo cual se espera que los estudiantes respondan a^2 y b^2 respectivamente.

Figura 4: Estudiantes armando rompecabezas Teorema de Pitágoras

Luego de que los estudiantes han construido los cuadrados sobre los catetos y comprobado las áreas de los mismos, se les pidió que con las cinco piezas construyeran el cuadrado sobre la hipotenusa, cuya longitud se llamó c. De esta manera pudieron comprobar que las cinco piezas con las que construyeron los cuadrados sobre los catetos coinciden exactamente con el cuadrado sobre la hipotenusa y, por tanto, que el área del cuadrado inscrito sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados inscritos sobre los catetos, logrando así hacer la relación $c^2 = a^2 + b^2$ para el Teorema de Pitágoras, donde a y b son las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa.

Logrando así la relación entre lo geométrico y lo algebraico de dicho teorema y, de esta manera, adquirir el conocimiento formal del mismo.

El ejercicio siguiente consistió en dar a los estudiantes las ternas pitagóricas que se presentaron al principio de la secuencia y se les pide que las comprueben utilizando la formula $c^2 = a^2 + b^2$, comprobando así de manera formal el Teorema de Pitágoras.
En esta secuencia es muy notorio que utilizar la historia para recrear los inicios de un concepto hizo que los estudiantes participaran de manera más activa en cada una de las actividades, logrando un aprendizaje óptimo, evidenciándose en el trabajo de retroalimentación.

Para el diseño de la secuencia 2 se hizo un análisis del desarrollo histórico epistemológico de los conceptos de razón y proporción, partiendo del trabajo que al respecto realizaron los pitagóricos. En particular de la concepción que tenían de número, que para ellos eran números naturales (como se conocen hoy) y de razones entre dichos números (Boyer, 2007; Pérez, 2001). Es importante aclarar que estos números además de indicar una cantidad tenían una representación geométrica, de ahí que pensaran que todo lo que existía en el universo tenía una medida exacta, llevándolos a hablar de magnitudes conmensurables y de razones entre magnitudes conmensurables (Kline, 2000; Mason, 2001),. Luego con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables toda la teoría sobre razones y proporciones de los pitagóricos fue cuestionada y tuvo que ser reestructurada, apareciendo Eudoxo quien desarrolla una nueva teoría de razones y proporciones, que tiene en cuenta magnitudes conmensurables e inconmensurables, y evita valores cuantitativos para las magnitudes geométricas y sus razones (Boyer, 2007; Gonzalez, 2008).

Con el diseño de la secuencia 2 se esperaba que el estudiante construyera los conceptos de razón y proporción. Para esto se tuvo en cuenta, en principio, la construcción del concepto de razón a partir de un ejercicio realizado por Eudoxo donde se pide que una distancia determinada sea recorrida por un gigante y un enano (Meavilla & Canteras, 1984). En este sentido, la secuencia comenzó formando parejas de estudiantes. A cada pareja se le entregó un metro y marcadores y se les pidió que, con el metro, midieran una distancia de dos metros. Cada miembro de la pareja debía contar el número de pasos que le toma recorrer la distancia medida, teniendo en cuenta que el número de pasos de un estudiante puede ser mayor que el de otro. La idea es que el estudiante pueda observar que la misma distancia se puede medir con distintas longitudes introduciendo así, implícitamente, las nociones de razón y proporción. (Ver figura 5)

Figura 5: Estudiantes recreando el ejercicio de Eudoxo "El gigante y el enano"

A continuación, se presentó a los estudiantes la actividad 2, la cual tiene como finalidad construir los conceptos de razón y proporción. Para su diseño se tuvo en cuenta el estudio sobre el desarrollo de estos conceptos que hicieron al respecto los pitagóricos, en particular del sentido que dieron al número y su consideración de magnitudes conmensurables.

De esta manera, la actividad comenzó entregándoles a los estudiantes dos tiras de lana, la primera de longitud 15 unidades y la segunda de longitud 60 unidades. Se les pidió que verifiquen si la lana de 15 unidades cabe exactamente en la lana de 60 unidades y, de ser así, decir cuántas veces. Aunque no aparece en la secuencia también se les preguntó a los estudiantes si pasaría lo mismo con segmentos de longitudes 3 unidades, 5 unidades, 10 unidades y se les preguntó si cabían exactamente en la tira lana de 60 unidades. La actividad continúa dando a los estudiantes un segmento de longitud 20 unidades. Luego se le dan 4 segmentos de longitudes: 2 unidades, 4 unidades, 3 unidades y 5 unidades, y se les pide verificar cuál de estos segmentos no cabe exactamente en el segmento de 20 unidades.

Seguidamente se les presentó a los estudiantes tres segmentos de igual longitud. El primer segmento se divide en dos partes iguales, el segundo en cuatro partes iguales y el tercero en ocho partes iguales. Para cada uno de los segmentos se les preguntó qué porción del total es la mitad del segmento y se les pidió que lo escribieran como fracción. Luego se les informó que dicha comparación entra las porciones y el total de cada segmento se llama razón, y que puede escribirse como fracción. Se dan cuenta, además, que al ser mitades del mismo segmento y escribirse como razón de manera diferente, son iguales. De esta manera, se introduce el concepto de proporción. Así, los estudiantes logran comprender los conceptos de razón y proporción y la relación aritmética y geométrica que existe entre ellos.

A continuación, se refuerza lo aprendido, presentando a los estudiantes tres situaciones. La primera situación consistió en darles a los estudiantes dos segmentos a y b, de longitudes 14 unidades y 10 unidades respectivamente. En este caso se les pidió a los estudiantes que indicaran en cuantos segmentos de longitud 1 y cuantos de longitud 2 caben exactamente en cada uno de los segmentos, y que expresaran su respuesta como razón. A continuación se les preguntó si existe una proporción entre las razones de los segmentos de longitud 1 con respecto a los segmentos a y b, y una proporción entre los segmentos de longitud 2 con respecto a los segmentos a y b.

Para la situación 2 se dio a los estudiantes dos cuadrados de lados 3 unidades y 6 unidades respectivamente y se les pidió, de entre cuatro posibilidades, cual es la razón entre el lado del cuadrado pequeño y el lado del cuadrado grande y, además explicar porque creían que es una razón.

En la situación 3 se les presentó un triángulo rectángulo de longitudes 3 unidades, 4 unidades y 5 unidades. Se les pidió que indicaran cual es la razón entre cada uno de los catetos y la hipotenusa, y entre el cateto pequeño con respecto al cateto grande. Con esta última actividad se introduce, de manera implícita, a los estudiantes en las razones en triángulos rectángulos.

En esta secuencia los estudiantes presentaron dificultades para diferenciar los conceptos de razones y proporciones, lo que hizo que las actividades propuestas fueran desarrolladas de manera más pausada para así lograr la comprensión de los conceptos trabajados, ya que para el trabajo de razones trigonométricas es fundamental tener claridad que es una razón y una proporción.

La secuencia 3, que es una continuación de la secuencia 2, comenzó hablando a los estudiantes de una situación problema resuelta por Thales (ver figura 6), donde aplica las razones y proporciones a triángulos rectángulos semejantes, utilizándolas para calcular la distancia de un barco en el mar (Meavilla & Canteras, 1984).

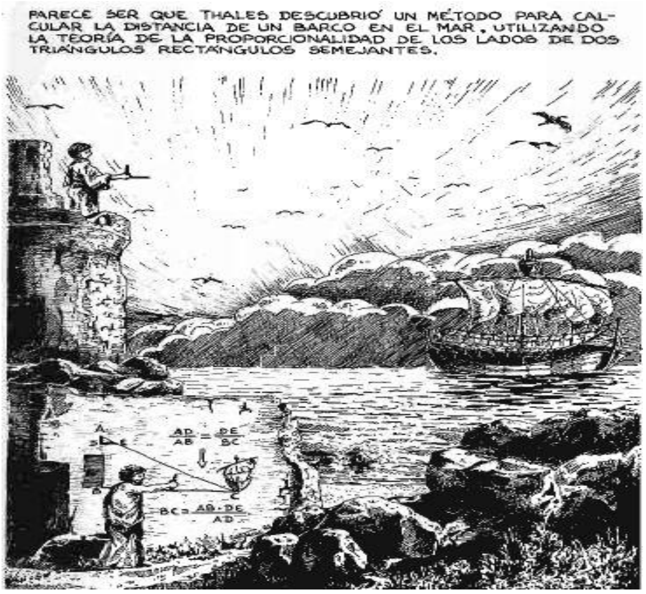


Figura 6: Thales de Mileto calculando la distancia de un barco en el mar

Luego, se refuerzan los conceptos de razón y proporción aplicándolos a figuras geométricas, especialmente al triángulo rectángulo, en la relación de sus lados, introduciendo así a los estudiantes a las razones trigonométricas. Así mismo se les trabaja la teoría de Thales de Mileto sobre la proporcionalidad de los lados de dos triángulos rectángulos semejantes, aplicándola a una situación real, similar al desarrollado por el matemático para el cálculo de la distancia de un barco en el mar (Kline, 1994; Meavilla & Canteras, 1984).

En esta secuencia los estudiantes mostraron una apropiación de los conceptos de razones y proporciones, lo cual fue evidenciado en la participación activa en el desarrollo de las actividades propuestas.

La secuencia 4 contempla el estudio de las razones trigonométricas, tema central de este trabajo, y de su relación con las funciones trigonométricas, aunque en esto último no se profundiza. Para el diseño de esta secuencia se tuvo en cuenta el trabajo desarrollado con los estudiantes en las secuencias 1, 2 y 3, en lo que respecta al estudio del teorema de Pitágoras y al de las razones y proporciones.

En cuanto al estudio histórico epistemológico llevado a cabo para el diseño de esta secuencia se tuvo en cuenta el desarrollo que de la trigonometría se hizo a partir de Hiparco, pasando por Ptolomeo, siguiendo luego con los árabes y los indios, durante los primeros siglos de la era cristiana, hasta llegar al Renacimiento. En particular, de la transformación que sufren las razones trigonométricas cuando se abandona el trabajo con arcos de circunferencia y se comienza a tomar en cuenta el ángulo que subtiende dicho arco y los lados del triángulo rectángulo que forma (Kline, 1992; Newman, 1994).

De esta manera la secuencia comenzó dándole a los estudiantes un círculo en el plano cartesiano, con centro en el origen O y de radio R, y un triángulo rectángulo en el primer cuadrante de catetos x y y e hipotenusa R, siendo y el cateto opuesto a un ángulo θ del triángulo, y x el cateto adyacente a dicho ángulo. A continuación se les pidió que encuentren la razón entre el cateto opuesto al ángulo θ y la hipotenusa, y se les informó que dicha razón se llama “seno del ángulo θ”. Luego se les preguntó cómo sería la razón sí R es igual a 1, es decir, si el círculo es unitario.

Posteriormente se les pidió que encontraran la razón entre el cateto adyacente al ángulo θ y la hipotenusa, y se les informó que dicha razón se llama “coseno del ángulo θ”. Así mismo se les pregunta que ocurre sí R es igual a 1.

Se les explicó además que de la misma manera se encuentran las demás razones trigonométricas en triángulos rectángulos, relacionando los lados del triángulo.

Así, los estudiantes hicieron la relación de las razones, con respecto a los lados de los triángulos rectángulos, dadas implícitamente en las secuencias 2 y 3, y las razones trigonométricas definidas en la secuencia 4.

La secuencia 4 continuó haciendo la relación entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas. En este punto los estudiantes se dieron cuenta que, aunque no son lo mismo, existe una relación entre ellas. Por ejemplo, que a partir de las razones trigonométricas en el círculo unitario se puede construir la función trigonométrica respectiva.

Se hizo un estudio del desarrollo histórico que durante los siglos XVI y XVII tuvo el concepto de función, donde la periodicidad tomo un papel fundamental en el desarrollo de la Física Moderna, lo cual permitió que pasara del estudio de las relaciones de los lados de un triángulo rectángulo a una trigonometría totalmente abstracta (Kline, 1994; Newman, 1994). Esto contribuyó al diseño de una situación con la cual se ayuda al estudiante a comprender estas relaciones. Primero se presentó a los estudiantes unas animaciones donde, a partir de las razones trigonométricas en el círculo unitario se construyen las funciones trigonométricas de seno y coseno.

Seguidamente se les entregó a los estudiantes papel milimetrado, transportador y regla. El papel milimetrado contiene en la parte superior una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y dividida los cuatro cuadrantes en ángulos centrales múltiplos de 30; además, los valores de dichos ángulos se presentan en el eje de abscisas de un plano cartesiano. Esto mismo se hace en la parte inferior del papel.

La idea era que los estudiantes recrearan lo visto en el video, para la construcción de las funciones seno y coseno a partir de las razones trigonométricas, en el papel milimetrado, y de esta forma pudieran comprobar ellos mismos dicha relación. (Ver figura 7)

Figura 7: Estudiante graficando las funciones seno y coseno a partir de las razones trigonométricas

3.2.3. Análisis de la transición del concepto del triángulo rectángulo a las razones trigonométricas

Para una buena comprensión de las razones trigonométricas los estudiantes deben haber adquirido, previamente, la comprensión de ciertos conceptos y propiedades matemáticas que, por su desconocimiento, puede traer retrasos en dicho proceso. Es por esta razón que antes de la aplicación de la secuencia 4, diseñada para el estudio de las razones trigonométricas, se aplica a los estudiantes las secuencias 1,2 y 3, con las cuales se pretende que el estudiante adquiera un aprendizaje significativo sobre el triángulo rectángulo y sus partes, el teorema de Pitágoras, y las razones y proporciones.

En la secuencia 1 los estudiantes reconocieron el triángulo rectángulo. Esto es, lo comprendieron como “aquel que tiene un ángulo recto o de 90 grados” y, además, identificaron su figura rotada de diferentes maneras y distinguieron en esta los catetos y la hipotenusa. También en esta secuencia, comprendieron el Teorema de Pitágoras en su forma geométrica, de acuerdo con la Proposición I.47 de los Elementos de Euclides (Hawking, 2007): “En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto” , o como suele aparecer en los libros de enseñanza: “En los triángulos rectángulos el área del cuadrado inscrito sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los lados inscritos sobre los catetos”. Además, estudiaron la relación con su forma algebraica o general: $c^2 = a^2 + b^2$, donde c^2 es el área del cuadrado inscrito sobre la hipotenusa de lado c, y a^2 y b^2 son las áreas de los cuadrados inscritos sobre los catetos de lados a y b, respectivamente.

Con las secuencias 2 y 3 los estudiantes comprendieron los conceptos de razón y proporción. En principio los comprendieron de manera intuitiva, desde las magnitudes conmensurables, las cuales aparecen en los Elementos de Euclides como Definición X.1, como sigue (Hawking, 2007): “Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida”. De esta manera, si dos magnitudes son conmensurables una puede ser medida por medio de la otra., lo que lleva a entenderlas como dos longitudes cuya razón es un número racional.

A continuación, comprendieron el concepto de razón y proporción, de acuerdo con las definiciones V.3 y V.6 de los Elementos de Euclides (Hawking, 2007), respectivamente: " Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas" y "llámese proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón". Así mismo, la forma aritmética como pueden ser escritas, como fracciones, y la propiedad fundamental de las proporciones: "En toda proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios".

Después de que los estudiantes comprendieron los conceptos antes mencionados, se procedió a aplicar la secuencia 4. En esta secuencia formalizaron los conceptos de razón trigonométrica, en particular las razones seno y coseno, que ya desde la secuencia 3 lo trabajaban de manera intuitiva. Así mismo, supieron diferenciar entre razón trigonométrica y función trigonométrica, y pudieron mirar la relación que existe entre ellas, esto es, como a partir de la razón trigonométrica, desde el circulo unitario, se puede determinar gráficamente una función trigonométrica, con valores de ángulos dados. De esta manera, se pasa de entender, por ejemplo, $sen\,\theta$ como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa del ángulo agudo θ de un triángulo rectángulo, a la función $y = sen\,\theta$, donde θ es la abscisa y y la ordenada en el plano cartesiano.

3.2.4 Análisis Didáctico

Es importante resaltar que las secuencias fueron diseñadas de tal forma que los estudiantes pudieran participar de manera activa durante su aplicación. Esto pudo verse cuando se les presentaron lecturas de carácter histórico sobre el tema a trabajar, películas sobre historia de la matemáticas, rompecabezas para armar, mediciones con cuerdas para ternas pitagóricas, el conteo de pasos en el problema del gigante y el enano, y otras actividades, lo que permitió que se volvieran protagonistas de su proceso de formación, llevándolos a ser más receptivos y atentos a las actividades realizadas, las cuales veían como juegos y no como actividades académicas, facilitando así la comprensión de los conceptos y propiedades. (Ver figura 8)

Figura 8: Actividades didácticas de los estudiantes

3.3. Diseño de la prueba final

La prueba final fue aplicada a 30 estudiantes del grado 10°1 de la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro, grupo intervenido con las 4 secuencias didácticas, la prueba fue diseñada para una duración de 2 horas institucionales.

Con esta prueba se va a evaluar la efectividad de la intervención y si los estudiantes dan cuenta de un aprendizaje significativo con respecto a los temas tratados.

La prueba final aplicada a los estudiantes es la misma prueba diagnóstica, aunque se agregaron nuevos indicadores y puntos a evaluar fundamentales para las razones trigonométricas.

Indicadores a evaluar:

- Indicador 1: Identifica el triángulo rectángulo y reconoce sus lados.
- Indicador 2: Identifica el Teorema de Pitágoras.
- Indicador 3: Identifica y discrimina las razones y las proporciones.
- Indicador 4: Reconoce los lados de un triángulo rectángulo, determina las razones entre ellos y los sabe nombrar.
- Indicador 5: Reconoce la relación entre las razones trigonométricas $sen\,\theta$ y $\cos\theta$ con las funciones trigonométricas $y = sen\,\theta$ y $y = cos\,\theta$

3.3.1. Análisis prueba final

Resultado y análisis de la prueba.

Cada uno de los indicadores se valorará empleando una rúbrica (ver anexo 8) que permite ubicar al estudiante evaluado en uno de los tres niveles de logro que son:

Nivel I: Insatisfactorio

No hay aprendizaje de los conceptos evaluados o los han comprendido de manera errada.

Nivel II: En proceso

Existe un aprendizaje parcial de los conceptos.

Nivel III: Satisfactorio

Hay un aprendizaje de los conceptos y sabe aplicarlos.

A continuación, se hace el análisis de la prueba final al grado 10°1 teniendo en cuenta cada indicador.

Escalas		**Indicadores**	**Porcentaje**
NI Insatisfactorio	No hay aprendizaje de los conceptos evaluados o los han comprendido de manera errada.	1	0%
		2	0%
		3	0%
		4	0%
		5	0%
NII En proceso	Existe un aprendizaje parcial de los conceptos.	1	10% (3 estudiantes)
		2	3.3% (1 estudiante)
		3	30% (9 estudiantes)
		4	20% (6 estudiantes)
		5	0%
NIII Satisfactorio	Hay un aprendizaje de los conceptos y sabe aplicarlos.	1	90% (27 estudiantes)
		2	96.6% (29 estudiantes)
		3	70% (21 estudiantes)
		4	80% (24 estudiantes)
		5	100% (30 estudiantes)

Tabla 4: Resultado de la prueba final de acuerdo a los indicadores

Desde un diagrama de barras el análisis anterior puede verse de la siguiente manera:

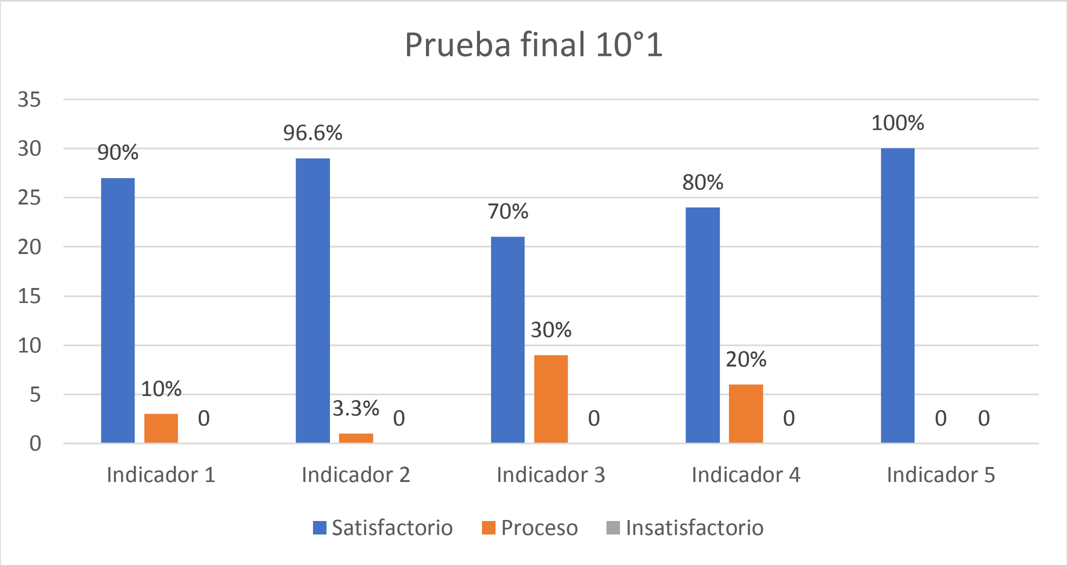


Figura 9: Análisis de resultados prueba final

Paralelo entre la prueba diagnóstica y la prueba final

- INDICADOR 1: Identifica el triángulo rectángulo y reconoce sus lados

  De los 30 estudiantes que presentaron la prueba, el 90% cumplen el indicador satisfactoriamente, mientras que el 10% se encuentra en proceso. Haciendo la comparación con el mismo indicador en la prueba diagnóstica se observa que solo el 50% cumplían satisfactoriamente, y el otro 50% lo cumplía parcialmente o con dificultad.

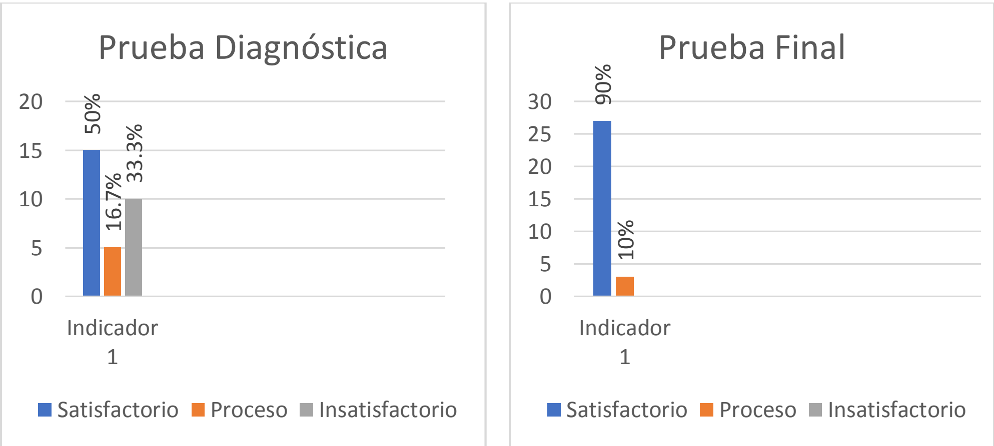


Figura 10: Paralelo prueba diagnóstica y prueba final - indicador 1

- INDICADOR 2: Identifica el Teorema de Pitágoras.

  De los 30 estudiantes evaluados el 96.6%, responden el indicador satisfactoriamente y solo un estudiante, equivalente al 3.33%, se encuentra en proceso. En la prueba diagnóstica, el 60%, de los estudiantes presentaron un resultado satisfactorio, y el 40%, se les dificultó notablemente.

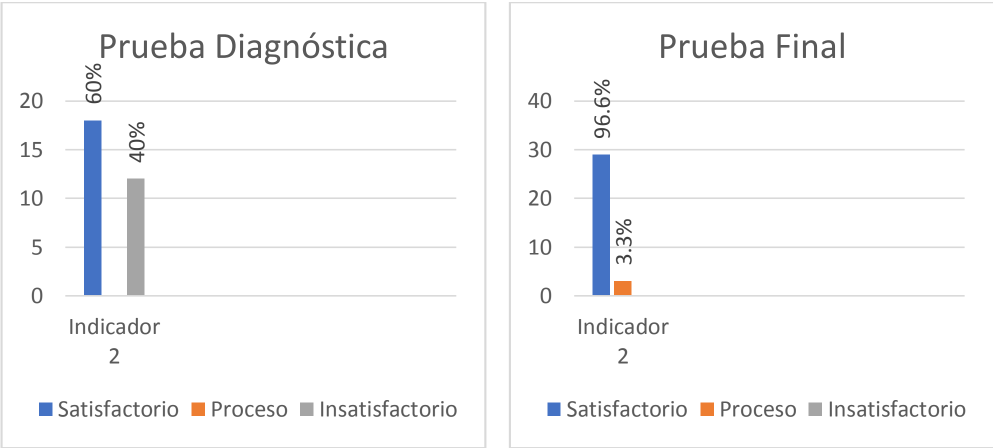


Figura 11: Paralelo prueba diagnóstica y prueba final - indicador 2

- INDICADOR 3: Identifica y discrimina las razones y las proporciones.

  De los 30 estudiantes que presentaron la prueba el 70%, respondieron satisfactoriamente, y el 30%, se encuentran en proceso. Haciendo la comparación con la prueba diagnóstica solo el 6.7%, de los estudiantes respondieron satisfactoriamente, y el 93.3%, presentaron un resultado insatisfactorio.

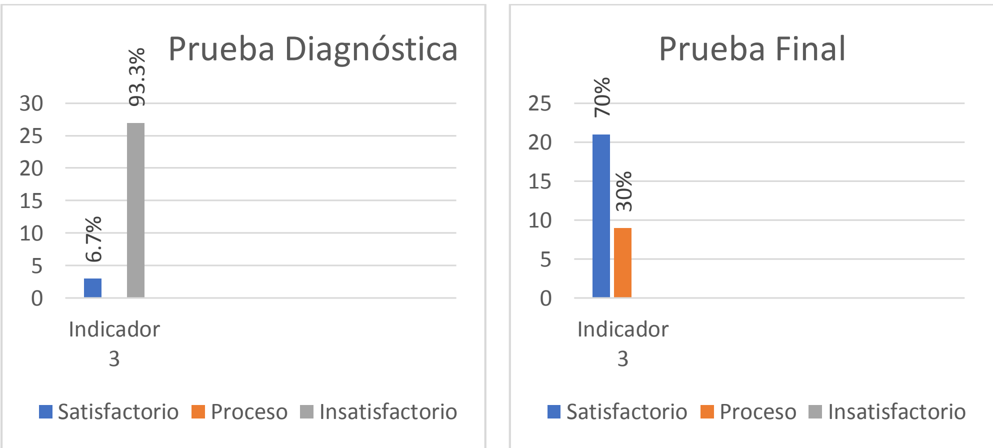


Figura 12: Paralelo prueba diagnóstica y prueba final – indicador 3

- INDICADOR 4: Reconoce las razones trigonométricas $sen\ y\ cos$.
  De los estudiantes evaluados el 80%, respondieron satisfactoriamente, y el 20%, restante se encuentran en proceso.

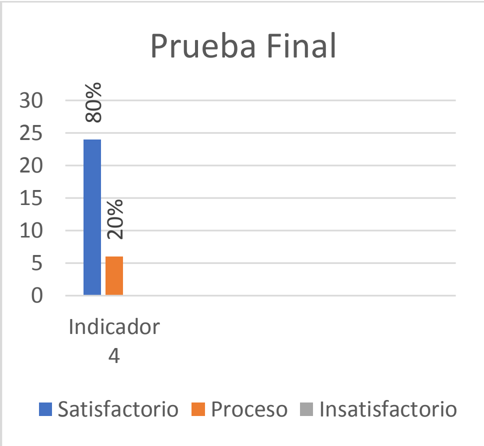


Figura 13: Prueba final - indicador 4

- INDICADOR 5: Identifica el grafico de la función $sen\ y\ cos$.
  De los 30 estudiantes evaluados el 100% respondieron satisfactoriamente.

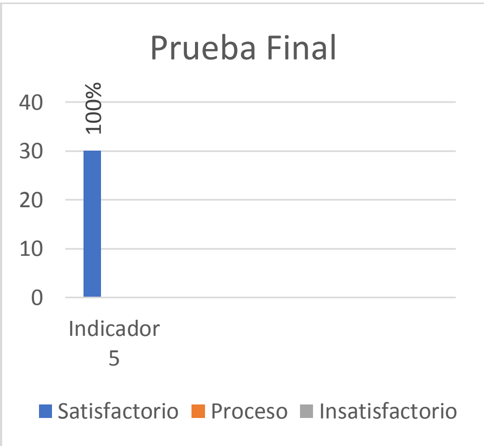


Figura 14: Prueba final - indicador 5

En síntesis, el análisis hecho a los indicadores 1, 2 y 3 en la prueba final muestra que al menos el 70% de los estudiantes evaluados se ubicaron en nivel satisfactorio, mientras que tan solo el 30% se ubicó en un nivel en proceso. Comparado esto con la prueba diagnóstica, donde la mayoría de los estudiantes, en cada uno de estos indicadores, se encontraba en un nivel insatisfactorio o en proceso. Con respecto a los indicadores 4 y 5, que hacen referencia a las razones y las funciones trigonométricas, el análisis muestra que al menos el 80% de los estudiantes a los que se les aplicó la prueba se encuentran en el nivel satisfactorio.

De esta manera, los resultados obtenidos en la prueba final muestran la efectividad de la propuesta, a partir de secuencias didácticas, aplicada a los estudiantes del grado 10°1 de la Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro.

4. CAPITULO IV: Conclusiones y recomendaciones

4.1. Conclusiones

Luego de haber hecho el diseño, la implementación y el análisis de la propuesta didáctica se llega a las siguientes conclusiones:

- La aplicación de la prueba diagnóstica a los estudiantes del grado 10°1 puso en evidencia el desconocimiento de los conceptos previos, necesarios para la construcción de las razones trigonométricas, y que se supone deben tener aprendidos para iniciar dicho proceso. Esto debido, quizás, a que dichos conceptos no fueron construidos, sino que fueron aprendidos de manera memorística, llevando a que no se comprenda de la manera pretendida por el docente y, además, que no se recuerde a largo plazo (Montiel, 2013; Morales, 2017).

- El rastreo histórico epistemológico que se hizo de las razones trigonométricas y de los conceptos y propiedades que llevaron a su evolución, se convirtió en la herramienta clave para el diseño de la secuencia didáctica, ya que el orden cronológico, los hechos e instrumentos utilizados en el momento permitieron direccionar el hilo conductor en la creación y aplicación de la misma.

- Durante la aplicación de las secuencias se pudo notar en los estudiantes una mejor disposición para realizar las actividades que se les presentaron, ya que pasaron de una metodología tradicional, donde participaban de manera pasiva, a una metodología “innovadora” que requería de ellos una participación activa. Esto permitió que fueran más receptivos y atentos a las actividades propuestas, las cuales veían como juegos y no como tareas académicas, lo que les facilitó la comprensión de los conceptos y propiedades dispuestos para cada sesión.

- Comparando los resultados de la prueba final con los de la prueba diagnóstica, en los indicadores que tienen que ver con la comprensión de los conceptos previos, necesarios para la construcción de las razones trigonométricas (indicadores I, II, III y IV), se observa en esta última que en su mayoría los estudiantes no superan el 50% en el nivel satisfactorio. Mientras que en la prueba final los mismos indicadores son superados por al menos el 70% de los estudiantes, en dicho nivel. Por su parte, el indicador V, que tiene que ver con las razones trigonométricas, y que sólo se evalúa en la prueba final, es superado en un 100% por los estudiantes. Esto muestra la eficacia de la intervención con las secuencias didácticas, evidenciando que se logra un aprendizaje significativo en los estudiantes a los cuales se les aplicó.

- Lo anterior permite concluir que el diseño de secuencias didácticas, a partir de un rastreo histórico epistemológico de las razones trigonométricas, es una herramienta didáctica de gran valor cuando se trata de construir en los estudiantes dichos conceptos.

4.2. Recomendaciones

- Por ser una herramienta de gran valor para la enseñanza de las matemáticas, se recomienda que la propuesta de diseñar situaciones didácticas, a partir de un rastreo histórico epistemológico de los conceptos fundamentales de la trigonometría, sea ampliada a otras líneas de las matemáticas, por ejemplo, al cálculo diferencial e integral en el grado 11.

- La historia y la epistemología de las ciencias sea incluida en los cursos de cualificación para docentes, ya que amplía la visión de estas y ayuda desde su quehacer diario a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

- Involucrar en la enseñanza de las matemáticas propuestas didácticas que permitan a los estudiantes participar de manera activa en la construcción de su pensamiento matemático, de manera que puedan desarrollar habilidades de pensamiento (argumentación, interpretación, proposición, entre otras) y habilidades heurísticas, lo cual no es posible con los métodos pasivos, memorísticos y repetitivos.

- Aclarar a los estudiantes que hay conceptos que se trabajan en geometría, trigonometría y en calculo, que, aunque son áreas distintas tienen propiedades en común que son abordadas de acuerdo a la pertinencia en el tema.

Anexo 1: Prueba Diagnóstica

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
JUVENIL NUEVO FUTURO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PRUEBA DIAGNÓSTICA DE TRIGONOMETRÍA

Docente: Alejandra Álvarez Bernal	Área Matemáticas
Nombre:	Grado: 10°1
Tema: Triángulo Rectángulo, Teorema de Pitágoras, Números Natrales, Números Racionales, Números irracionales, Razones, Proporciones y Área del Cuadrado.	
Objetivo: Indagar en los saberes previos que son necesarios para la comprensión de las razones trigonométricas.	
Materiales: Papel, lápiz, borrador.	
Número de páginas: 7	Tiempo estimado: 55 min.

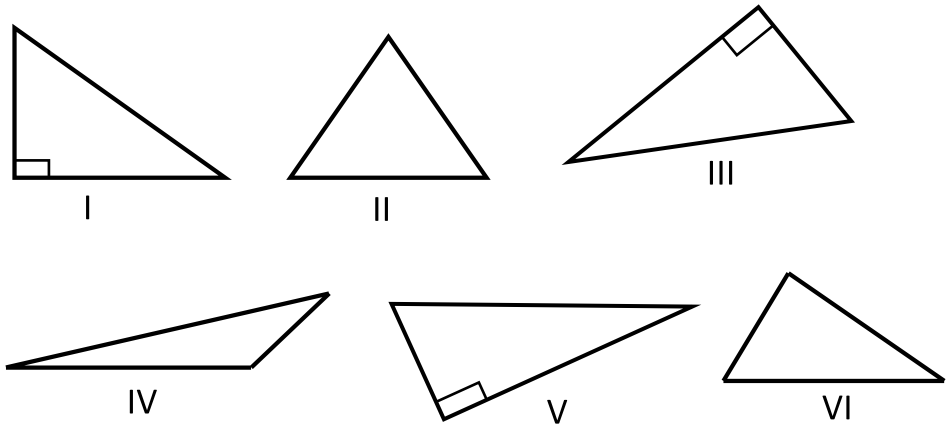
Competencias

- Comprender el Teorema de Pitágoras y aplicarlo a situaciones en diferentes contextos.
- Identificar y discriminar las razones y las proporciones.
- Reconocer las diferencias que hay entre los elementos del conjunto de los números naturales, el conjunto de los racionales y el conjunto de los números irracionales.

Preguntas de selección múltiple con única respuesta.

Para cada una de las preguntas que se hacen a continuación se dan cuatro posibilidades de respuesta. Escoja solo una de estas posibles respuestas.

1. Considérense los siguientes triángulos



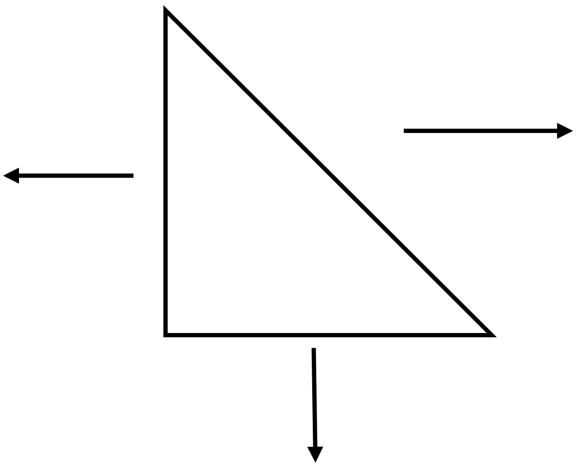
De los triángulos anteriores son rectángulos:

a) II, IV y V c. I, III y VI

b) II, III y V d. I, III y V

¿Por qué considera que los triángulos son rectángulos?

2. En el siguiente triángulo escriba, al lado de cada flecha, el nombre de cada uno de los lados:



3. Sólo una de las afirmaciones siguientes es correcta, indique cuál:

a. Todo triángulo tiene catetos e hipotenusa.

b. Sólo los triángulos rectángulos tienen catetos e hipotenusa.

c. Algunos triángulos tienen tres catetos.

d. Algunos triángulos tienen 2 hipotenusas y un cateto.

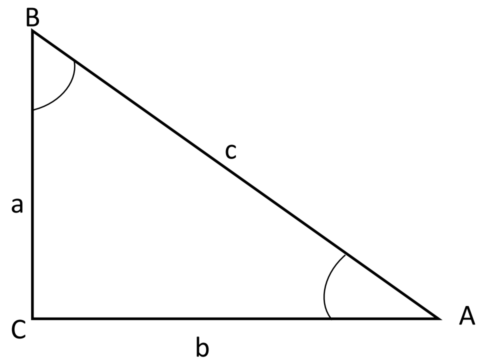
4. Cuál de los siguientes enunciados considera usted que relaciona el Teorema de Pitágoras

a. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

b. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
c. En todo triángulo rectángulo la suma de los ángulos agudos es 90°.

d. En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es menor que la suma de las longitudes de los catetos.

5. Observa el siguiente triángulo rectángulo



Cuál de las siguientes fórmulas considera usted que representa el teorema de Pitágoras, para el triángulo dado:

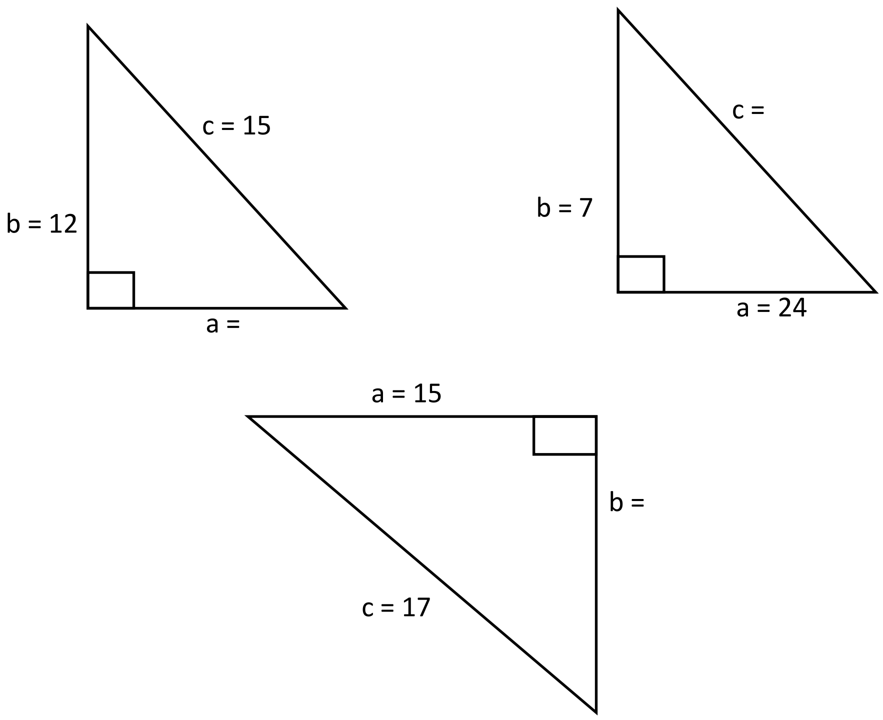
a) $a^2 + b^2 = c^2$

b) $m(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 90°$

c) $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180°$

d) $c < a + b$

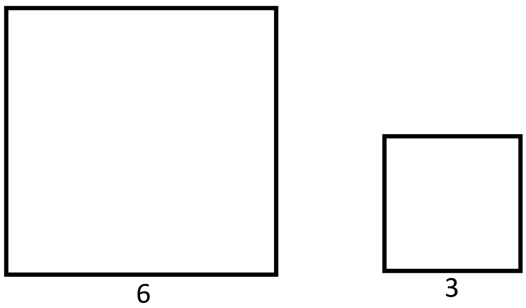
6. Encontrar para cada triángulo dado, la longitud del lado pedido:



7. Resuelva la siguiente situación problema

   Una escalera de 15 metros se apoya en una pared vertical, de modo que el pie de la escalera se encuentra a 9 metros de esa pared. Calcula la altura del muro desde el piso a la parte más alta de la escalera.

8. Responde de acuerdo con los siguientes cuadrados.

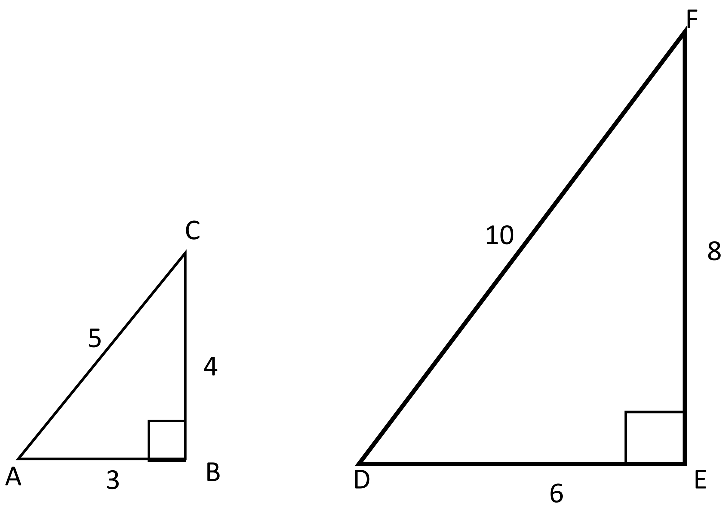


   La razón entre el lado del cuadrado grande y el lado del cuadrado pequeño es:

   a) 6 x 3
   b) 6 - 3
   c) $\frac{3}{6}$
   d) 6 + 3

   ¿Por qué consideras que esa es una razón?

9. Considérense los siguientes triángulos



De acuerdo con lo observado en los triángulos, puede afirmarse que $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ es una proporción, porque:

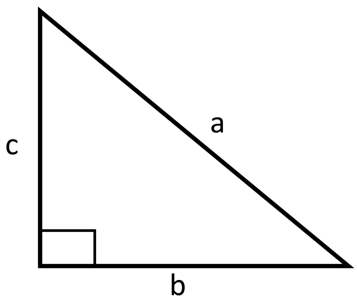
a. $6^2 + 8^2 = 10^2 \ y \ 3^2 + 4^2 = 5^2$

b. La razón entre los lados AB y DE es la misma que entre los lados AC y DF y es igual a $\frac{1}{2}$

c. $\frac{3}{6} \ y \ \frac{5}{10}$ son números racionales

d. $\frac{3}{6} \ y \ \frac{5}{10}$ son razones entre lados de los triángulos

10. Observa el siguiente triángulo rectángulo:



El área del cuadrado cuyo lado es igual a la longitud de la hipotenusa viene representada por:

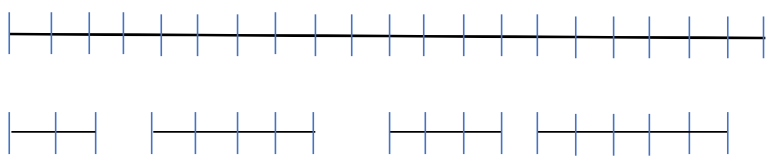
a. bc

b. b^2

c. a^2

d. ac

11. ¿Cuál de los siguientes segmentos pequeños no cabe exactamente en el segmento grande? Indique por qué:



A B C D

12. De los siguientes números indique cuál es natural:

a. $\sqrt{7}$

b. 12

c. $\frac{2}{11}$

d. - 5

¿Por qué piensas que es u n número natural?

13. De los siguientes números indique cuál es irracional:

a. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$

b. $\frac{4}{9}$

c. $\sqrt{5}$

d. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

¿Por qué crees que es un número racional?

14. De los siguientes números indique cuál es irracional:

a. $\sqrt{2}$

b. 8

c. $\frac{7}{4}$

d. - 6

¿Por qué piensas que es un número irracional?

Anexo 2: Rubrica prueba diagnóstica

Indicadores	**Nivel I Insatisfactorio**	**Nivel II En proceso**	**Nivel III Satisfactorio**
Indicador 1	No identifica el triángulo rectángulo y no reconoce sus lados.	Identifica el triángulo rectángulo, pero no reconoce sus lados.	Identifica el triángulo rectángulo y reconoce sus lados.
Indicador 2	No identifica el Teorema de Pitágoras.	Identifica el Teorema de Pitágoras geométricamente, pero no su definición formal.	Identifica el Teorema de Pitágoras.
Indicador 3	No comprende y no aplica el Teorema de Pitágoras a situaciones en diferentes contextos.	Comprende, pero no aplica el Teorema de Pitágoras a situaciones en diferentes contextos.	Comprende y aplica el Teorema de Pitágoras a situaciones en diferentes contextos.
Indicador 4	No reconoce el cuadrado y no halla su área.	Reconoce el cuadrado, pero no halla su área.	Reconoce el cuadrado y halla su área.
Indicador 5	No identifica y no discrimina las razones y las proporciones.	Identifica, pero no discrimina las razones y las proporciones.	Identifica y discrimina las razones y las proporciones.
Indicador 6	No reconoce las diferencias que hay entre los elementos del conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.	Reconoce las diferencias que hay entre los elementos del conjunto de los números naturales, pero no el conjunto de los números racionales o en el conjunto de los números irracionales.	Reconoce las diferencias que hay entre los elementos del conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.

Anexo 3: Tabla de resultados prueba diagnóstica.

	Ind. 1 Preg.1,2,3			Ind. 2: Preg. 4,5			Ind. 3: Preg. 6,7			Ind. 4: Preg. 10			Ind. 5: Preg. 8,9,11			Ind. 6: Preg. 12,13,14		
NOMBRE	NI	NII	NIII	NI	NII	NIII	NI	NII	NIII	NI	NII	NIII	NI	NII	NIII	NI	NII	NIII
ESTUDIANTE 1			X			X			X			X			X			X
ESTUDIANTE 2			X			X			X	X					X	X		
ESTUDIANTE 3	X			X				X				X			X	X		
ESTUDIANTE 4		X				X			X	X					X			X
ESTUDIANTE 5	X					X			X	X					X			X
ESTUDIANTE 6		X		X					X			X			X	X		
ESTUDIANTE 7			X	X					X	X					X		X	
ESTUDIANTE 8	X			X					X	X					X	X		
ESTUDIANTE 9	X			X					X	X					X			X
ESTUDIANTE 1O		X		X					X	X					X	X		
ESTUDIANTE 11		X				X			X			X			X			X
ESTUDIANTE 12			X			X			X			X			X			X
ESTUDIANTE 13	X			X					X	X					X	X		
ESTUDIANTE 14	X			X					X			X		X		X		
ESTUDIANTE 15		X		X					X	X					X	X		
ESTUDIANTE 16		X		X					X			X			X		X	
ESTUDIANTE 17	X			X			X					X		X		X		
ESTUDIANTE 18		X		X					X	X					X			X
ESTUDIANTE 19	X					X			X	X					X			X
ESTUDIANTE 20	X			X					X	X					X	X		
ESTUDIANTE 21	X			X					X	X			X			X		
ESTUDIANTE 22		X				X			X	X					X		X	
ESTUDIANTE 23		X				X			X			X			X			X
ESTUDIANTE 24		X				X			X			X	X			X		
ESTUDIANTE 25	X					X			X	X					X	X		
ESTUDIANTE 26	X			X					X	X			X			X		
ESTUDIANTE 27	X			X					X			X		X				X
ESTUDIANTE 28			X	X					X			X		X				X
ESTUDIANTE 29	X					X			X	X					X			X
ESTUDIANTE 30	X			X			X			X					X			X

Ind = indicadores

Nivel I: Insatisfactorio

Nivel II: En proceso

Nivel III: Satisfactorio

Anexo 4: Secuencia 1:

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
JUVENIL NUEVO FUTURO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Docente: Alejandra Álvarez Bernal	Área Matemáticas
Nombre:	Grado: 10°1
Tema: Triángulo rectángulo, Teorema de Pitágoras.	
Objetivo: Comprende el Teorema de Pitágoras y lo aplica en diferentes contextos.	
Materiales: Cartón paja, pintillas, lana, rompecabezas, papel lápiz, borrador	
Tiempo estimado: 2 horas	

Secuencia 1

Conociendo la historia del Teorema de Pitágoras

Muchos siglos antes de que la comunidad pitagórica apareciera en escena, las civilizaciones babilónicas y egipcias ya conocían, de manera empírica, el Teorema de Pitágoras; en particular lo que se conoce en matemáticas como ternas pitagóricas. Es decir, ternas de números que son las longitudes delos lados de un triángulo. Esto puede verse evidenciado en la tablilla de Plimpton 322, fechada entre el año 1900 a.C., y 1600 a. C., y el papiro de Rhind, que data de hacia el año 1700 a.C. (Kline, El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días,I, 1992), (Newman, 1994).

Los escribas sacerdotales, que eran los sabios de estas civilizaciones, usaban estas ternas para construir triángulos rectángulos, con lo que se ayudaban para hacer distintos tipos de mediciones. Para tal caso utilizaban cordeles con nudos, donde la longitud entre nudo y nudo representaba una unidad, y eran atadas a tres estacas, que formaban el triángulo. De esta forma se ayudaron para medir terrenos y construir las famosas pirámides.

Al parecer los filósofos griegos, en particular los pitagóricos, conocieron los trabajos, sobre ternas pitagóricas, hechas por las civilizaciones babilónicas y egipcias, quizás en viajes hechos a estos lugares o traídos por viajeros que llegaban de visita a las islas griegas (Kline, El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días,I, 1992). En un principio Trabajaron las ternas pitagóricas de una manera empírica, al igual que las civilizaciones babilónicas y egipcias. Según la tradición, asegura González Urbaneja, Pitágoras habría dado una prueba empírica del teorema que lleva su nombre basado en disecciones de cuadrados (Gonzalez Urbaneja, 2008). Luego los pitagóricos con base en propiedades de las proporciones logran hacer una demostración formal del Teorema de Pitágoras. De esta manera surgieron otro tipo de demostraciones del Teorema de Pitágoras con ayuda de la geometría. Desde entonces el Teorema de Pitágoras sigue siendo una herramienta de gran valor, no solo en las matemáticas sino en diferentes áreas del saber, ayudando a dar solución a diferentes tipos de problemas.

ACTIVIDAD 1: Ternas Pitagóricas

Se les da a los estudiantes ternas de números, con la lana van a tomar segmentos de longitud igual a cada uno de los valores según la terna dada.
Ayudándose con las puntillas van a formar un triángulo cuyos lados sean dichos segmentos.
Luego de construir los triángulos, con la ayuda del transportador se mide los ángulos del triángulo.

Terna 1: 3, 4, 5

Medida ángulo 1:

Medida ángulo 2:

Medida ángulo 3:

¿Qué tipo de triángulo construyó? ______________________

Terna 2: 5, 12, 13

Medida del ángulo 1:

Medida del ángulo 2:

Medida del ángulo 3:

¿Qué tipo de triángulo construyó? _______________________

Terna 3: 7,24, 25

Medida ángulo 1:

Medida ángulo 2:
Medida ángulo 3:

¿Qué tipo de triángulo construyó? ______________________________

ACTIVIDAD 2: Rompecabezas Teorema de Pitágoras

A continuación, se entrega a los estudiantes un rompecabezas. La idea es que con las partes de los cuadrados pequeños armen el cuadrado grande.

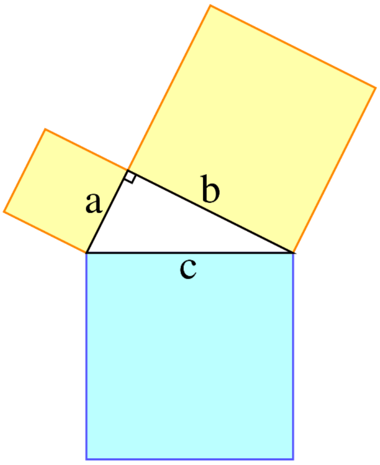
1. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta

   a. El área del cuadrado grande es igual al área del cuadrado mediano restándole el área del cuadrado pequeño.

   b. El área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños.

   c. El área del cuadrado grande es 2 veces el área del cuadrado mediano.

2. Se presenta un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c, sobre los cuales se inscriben cuadrados.



- El área del cuadrado cuyo lado es el cateto a esta dada por: _______

- El área del cuadrado cuyo lado es el cateto b esta dada por: ______

- El área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa c esta dada por: _____

3. La expresión matemática $a^2 + b^2 = c^2$ donde a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa puede leerse como:
   a) La suma de las áreas de los cuadrados inscritos en los catetos es igual al área del cuadrado inscrito en la hipotenusa.

   b) La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a la longitud de la hipotenusa.

   c) La suma del cuadrado inscrito en un lado cualquiera de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

4. De acuerdo con lo anterior puede afirmarse que si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa entonces:

   a) $a^2 - b^2 = c^2$

   b) $a^2 = 2c^2$

   c) $a^2 + b^2 = c^2$

5. Utilice el Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$ donde a y b son catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa.

   a. Halle el lado c si $a = 3\ y\ b = 4$

   b. Halle el cateto a si $b = 12\ y\ c = 13$

   c. Halle el cateto b si $a = 7\ y\ c = 25$

Anexo 5: Secuencia 2:

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
JUVENIL NUEVO FUTURO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Docente: Alejandra Álvarez Bernal	Área Matemáticas
Nombre:	Grado: 10°1
Tema: Razones y Proporciones	
Objetivo: Identificar y discriminar las razones y las proporciones.	
Materiales: Lana, metro, papel, marcador, borrador	
Tiempo estimado: 2 horas	

Secuencia 2

Conociendo la historia: La Maravillosa respuesta que hizo famoso a Eudoxo

EN RELACIÓN CON EL PRINCIPIO QUE ACABAMOS DE OFRECER, NOS PARECE INEVITABLE INCLUIR UN BELLO PÁRRAFO, CONTENIDO EN LA OBRA "LOS GRANDES MATEMÁTICOS" DE H. W. TURNBULL ("SIGMA: EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS". TOMO I, PÁGS. 26 Y 27). DICE ASÍ:
"COMBINEMOS AHORA ESTA ARITMÉTICA DE ESCALAS CON LA GEOMETRÍA DE UNA LÍNEA DIVIDIDA. POR EJEMPLO, SEA UNA LÍNEA AB DIVIDIDA AL AZAR POR C, EN DOS LONGITUDES a Y b, DONDE $AC = a$, $CB = b$. ENTONCES SUBSISTE LA CUESTIÓN, ¿CUÁL ES EL SENTIDO ARITMÉTICO "EXACTO" DE LA RAZÓN $a:b$, SEAN ÉSTOS O NO IRRACIONALES? LA MARAVILLOSA RESPUESTA A ESTA PREGUNTA ES LO QUE HIZO TAN FAMOSO A EUDOXO. ANTES DE CONSIDERARLA, TOMEMOS COMO EJEMPLO LOS PASOS DE DOS CAMINANTES. UN HOMBRE ALTO A TIENE UN PASO REGULAR DE UNA LONGITUD a, Y SU AMIGO MÁS BAJO B TIENE UN PASO b. SUPONGAMOS AHORA QUE 8 PASOS DE A CUBREN EL MISMO TERRENO QUE 13 DE B; EN ESTE CASO, LOS PASOS "INDIVIDUALES" DE A Y B SE HALLAN EN LA RAZÓN 13:8. LA REPETICIÓN DE PASOS, PARA HACERLES CUBRIR UNA DISTANCIA CONSIDERABLE, ACTÚA COMO UN VIDRIO DE AUMENTO Y AYUDA A MEDIR LOS PASOS INDIVIDUALES a Y b, COMPARÁNDOLOS ENTRE SÍ. AQUÍ TENEMOS EL PUNTO DE VISTA ADOPTADO POR EUDOXO. EN EFECTO, ÉSTE DICE: MULTIPLIQUEMOS NUESTRAS MAGNITUDES a Y b CUYA RAZÓN SE PIDE Y VEAMOS QUÉ SUCEDE".

"SUPONGAMOS, CONTINÚA, QUE PODEMOS SABER SI a Y b SON IGUALES Y SI NO ES ASÍ CUÁL ES MAYOR. ENTONCES, SI a ES EL MAYOR, SUPONGAMOS, EN SEGUNDO LUGAR, QUE PODEMOS HALLAR MÚLTIPLOS, $2b$, $3b$,.. .., nb, DE LA MAGNITUD MÁS PEQUEÑA b; Y, EN TERCER LUGAR, SUPONGAMOS QUE SIEMPRE PODEMOS HALLAR UN MÚLTIPLO nb DE b QUE SUPERE A a. (EL HOMBRE ALTO PODRÍA TENER BOTAS DE SIETE LEGUAS Y EL HOMBRE BAJO PODRÍA SER PULGARCITO. ¡MÁS PRONTO O MÁS TARDE EL ENANO DARÍA ALCANCE A UN PASO DE SU AMIGO!) POCOS NEGARÁN LA EXACTITUD DE ESTOS SIMPLES SUPUESTOS; NO OBSTANTE, SUS IMPLICACIONES MATEMÁTICAS HAN DEMOSTRADO SER MUY SUTILES. A ESTA TERCERA SUPOSICIÓN DE EUDOXO SE LE HA DADO CRÉDITO DE FORMA VARIADA, PERO ACTUALMENTE SE LA CONOCE COMO EL "AXIOMA DE ARQUÍMEDES"."

ACTIVIDAD 1

Formar parejas para replicar la historia de los pasos del Gigante y el Enano.

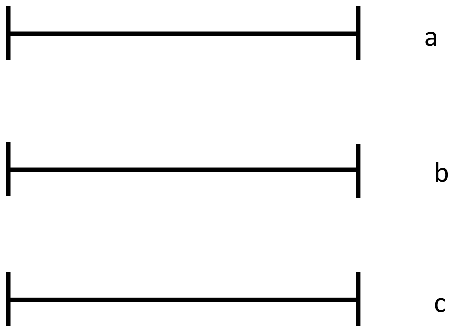
- Señalizar 2 metros por estudiante.
- Caminar para contar la cantidad de pasos y analizar las medidas

Pasos estudiante 1 ________ Pasos estudiante 2 ________

ACTIVIDAD 2

Tomar dos tiras de lana una de 60 unidades y otra de 15 unidades, para mirar si tiene unidades en común.

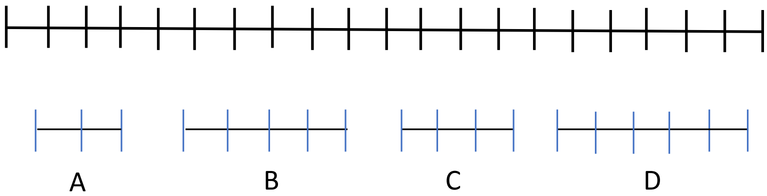
1. Consideremos los siguientes tres segmentos



- ¿Considera usted son de igual medida?

  Si _____ No_____

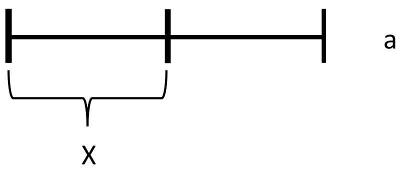
- ¿Cuál de los siguientes segmentos pequeños si es medido repetidas veces en el segmento grande no cabe exactamente en él? Indique por qué:



Razón: Es una comparación

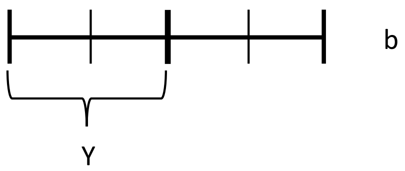
Proporción: Es la igualdad de dos razones

2. Se presentan los segmentos a, b y c, cada uno de ellos está dividido en partes iguales.



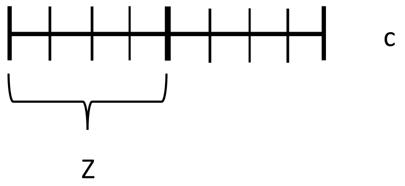
¿La porción X en el segmento a, que parte del total es? _______

¿Cómo se escribe la razón? _______



¿La porción Y en el segmento b, que parte del total es? _______

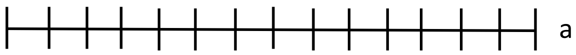
¿Cómo se escribe la razón? _______

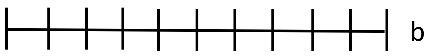


¿La porción Z en el segmento c, que parte del total es? _______

¿Cómo se escribe la razón? _______

3. Ahora analicemos el siguiente par de segmentos





- ¿Cuántos segmentos de longitud 1 caben exactamente en el segmento a?
  Indique la respuesta en razón _____

- Cuántos segmentos de longitud 1 caben exactamente en el segmento b?
  Indique la respuesta en razón _____

- ¿Cuántos segmentos de longitud 2 caben exactamente en el segmento a?
  Indique la respuesta en razón _____

- ¿Cuántos segmentos de longitud 2 caben exactamente en el segmento b?
  Indique la respuesta en razón _____

Razón segmento de longitud 1 respecto al segmento a	____
Razón segmento de longitud 1 respecto al segmento b	____

¿Existe una proporción entre las dos razones? _____

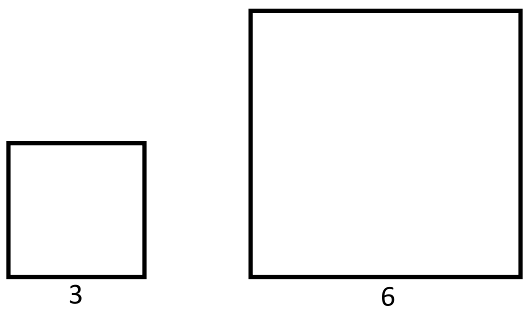
Indique cual _______

Razón segmento de longitud 2 respecto al segmento a	____
Razón segmento de longitud 2 respecto al segmento b	____

¿Existe una proporción entre las dos razones? _____

Indique cual _______

4. Responde de acuerdo con los siguientes cuadrados



La razón entre el lado del cuadrado pequeño y el lado del cuadrado grande es:

e) 6 x 3

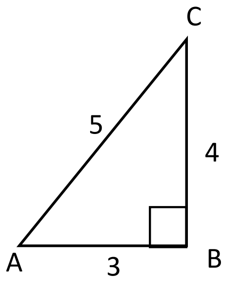
f) 6 - 3

g) $\frac{3}{6}$

h) 6 + 3

¿Por qué consideras que esa es una razón?

5. En el triángulo rectángulo dado ¿Cuál es la razón entre el cateto AB y la hipotenusa AC?



¿Cuál es la razón entre el cateto AB y la hipotenusa AC? _____

¿Cuál es la razón entre el cateto BC y la hipotenusa AC? _____

¿Cuál es la razón entre el cateto AB y el cateto BC? _____

Anexo 6: Secuencia 3:

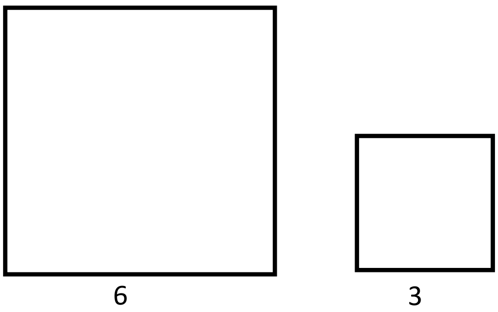
INSTITUCIÓN EDUCATIVA
JUVENIL NUEVO FUTURO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Docente: Alejandra Álvarez Bernal	Área Matemáticas
Nombre:	Grado: 10°1
Tema: Razones y Proporciones	
Objetivo: Identificar y aplicar las razones y proporciones en diferentes contextos.	
Materiales: Lápiz y borrador	
Tiempo estimado: 2 horas	

Secuencia 3

1. Responde de acuerdo a los siguientes cuadros



La razón entre el lado del cuadrado grande y el lado del cuadrado pequeño es:

i) $6 - 3$

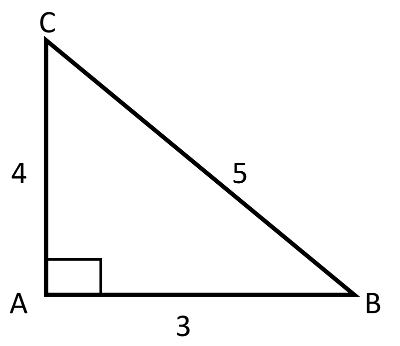
j) $6 + 3$

k) $\frac{3}{6}$

l) 6×3

¿Por qué consideras que esa es una razón?

2. En el triángulo rectángulo dado

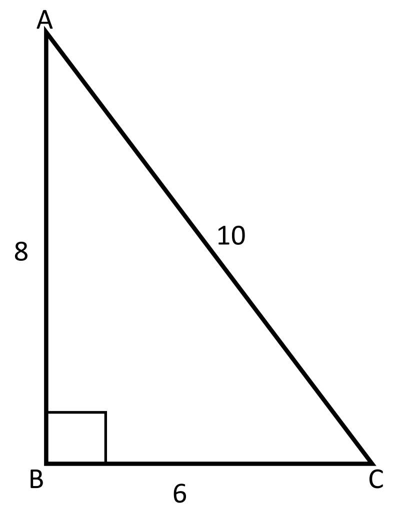


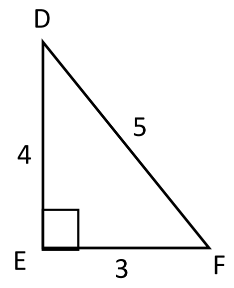
¿Cuál es la razón entre el cateto AB y la hipotenusa BC? _____

¿Cuál es la razón entre el cateto AC y la hipotenusa BC? ______

¿Cuál es la razón entre el cateto AB y el cateto AC? _______

3. En los siguientes triángulos rectángulos



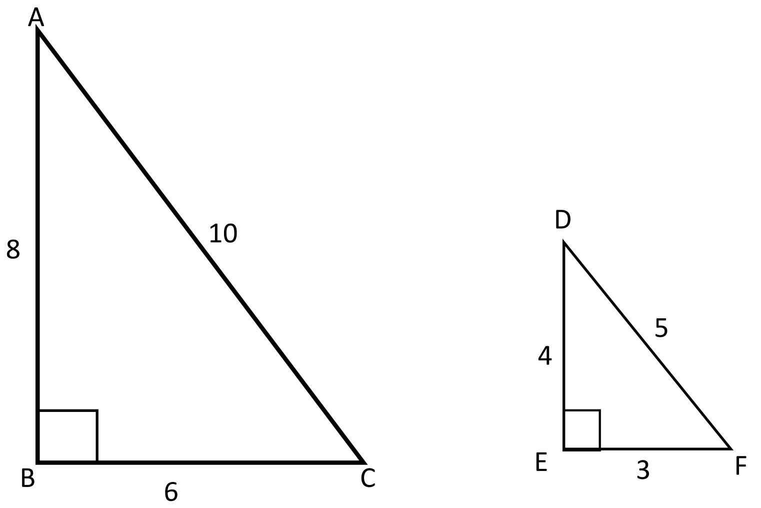


a. La razón entre el cateto AB y el cateto BC es:

b. La razón entre el cateto DE y el cateto EF es:

¿Existe una proporción?

4. Considere los siguientes triángulos rectángulos

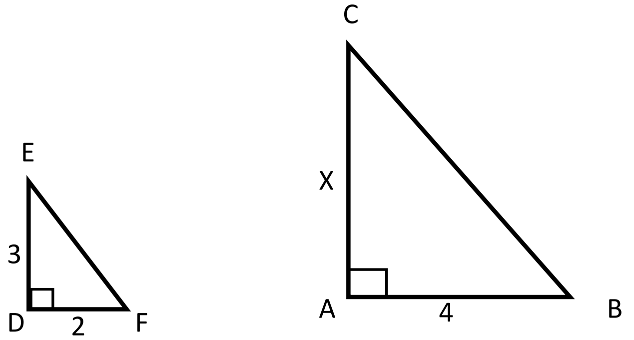


De acuerdo con lo observado en los triángulos puede afirmarse que:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$$

¿Es una proporción, por qué?

5. Observemos los siguientes triángulos rectángulos



a. ¿Cuál es la razón entre el cateto DF y el cateto DE?

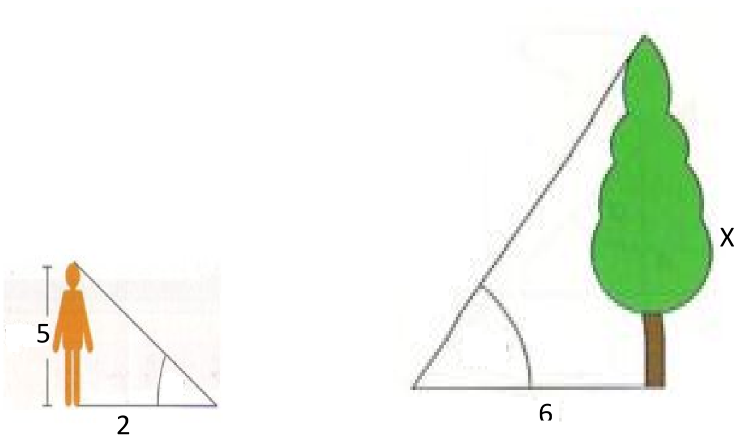
b. ¿Cuál es la razón entre el cateto AB y el cateto AC?

Para que se cumpla una proporción, es decir, para que se dé:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$$

c. ¿Cuál debe ser el valor de X?

6. Observemos la siguiente imagen



a. ¿Cuál es la razón entre la altura y la sombra del hombre? _______________

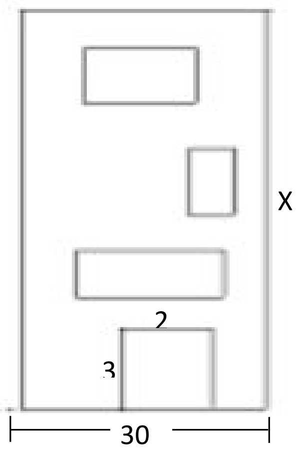
b. ¿Cuál es la razón entre la altura y la sombra del árbol? ________________

c. ¿Existe una proporción entre la sombra del hombre con respecto a su altura y la sombra del árbol con respecto a su altura? ________________

d. ¿Cómo quedaría dicha proporción? _________________

e. ¿Cuál sería la altura del árbol? _________________

7. A continuación, se presenta la casa de Marco



a. Sabiendo que la razón entre la base de la puerta y su altura es la misma que entre la base de la casa y su altura en la misma. ¿Cuál será la altura X de la casa?

b. A un lado de la casa (lado izquierdo) se encuentra un pino pequeño que se encuentra atado a una cuerda desde el piso para mantenerlo de manera vertical.
Al otro lado de la casa (lado derecho) se encuentra apoyada desde la parte más alta del árbol hasta el piso, una escalera. Se sabe que la longitud de la cuerda es de 2 metros, la altura del pino es de 1 metro y la longitud de la escalera es de 6 metros.
¿Cuál será la altura del árbol, si se sabe que la razón entre la altura del pino y la longitud de la cuerda es la misma que entre la altura del árbol y la longitud de la escalera?

Anexo 7: Secuencia 4:

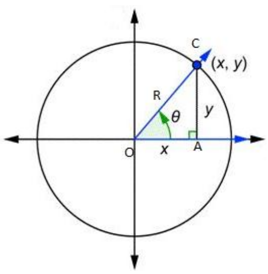
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
JUVENIL NUEVO FUTURO

Docente: Alejandra Álvarez Bernal	Área Matemáticas
Nombre:	Grado: 10°1
Tema: Razones trigonométricas	
Objetivo: Construir, reconocer y comprender las razones trigonométricas	
Materiales: Lápiz, borrador, transportador, regla y compas.	
Tiempo estimado: 2 horas	

Secuencia 4

1. Considere una circunferencia de radio R y el triángulo rectángulo OAC sobre ella. Como se muestra a continuación

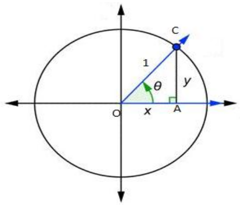


A la razón entre el cateto opuesto de un ángulo θ y la hipotenusa de un triángulo rectángulo se le llama $sen\ \theta$

a. De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta el triángulo dado, el $sen\ \theta$ es:

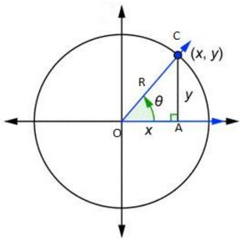
$$sen\ \theta\ =\ \_\_\_\_\_$$

b. Supóngase ahora que el radio $R\ =\ 1$, como se muestra en la figura, de acuerdo con esto:



$sen\ \theta\ =$ ____ $sen\ \theta =$ _____

2. Considere una circunferencia de radio R y el triángulo rectángulo OAC sobre ella. Como se muestra a continuación

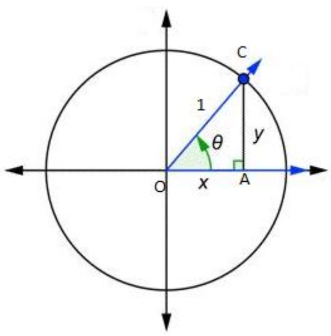


A la razón entre el cateto adyacente de un ángulo θ y la hipotenusa de un triángulo rectángulo se le llama $cos\ \theta$

a. De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta el triángulo dado, el $cos\ \theta$ es:

$cos\ \theta\ =$ _____

b. Supóngase ahora que el radio $R\ =\ 1$, como se muestra en la figura, de acuerdo con esto:



$cos\ \theta\ =$ _____ $\cos\ \theta =$ _____

Anexo 8: Rubrica Prueba final

Indicadores	**Nivel I Insatisfactorio**	**Nivel II En proceso**	**Nivel III Satisfactorio**
Indicador 1	No identifica el triángulo rectángulo y no reconoce sus lados.	Identifica el triángulo rectángulo, pero no reconoce sus lados.	Identifica el triángulo rectángulo y reconoce sus lados.
Indicador 2	No identifica el Teorema de Pitágoras.	Identifica el Teorema de Pitágoras geométricamente, pero no su definición formal.	Identifica el Teorema de Pitágoras.
Indicador 3	No identifica y no discrimina las razones y las proporciones.	Identifica pero no discrimina las razones y las proporciones.	Identifica y discrimina las razones y las proporciones.
Indicador 4	No reconoce los lados de un triángulo rectángulo, no determina las razones entre ellos y no los sabe nombrar.	Reconoce los lados de un triángulo rectángulo, pero no determina las razones entre ellos y no los sabe nombrar.	Reconoce los lados de un triángulo rectángulo, determina las razones entre ellos y los sabe nombrar.
Indicador 5	No reconoce la relación entre las razones trigonométricas $sen\,\theta$ y $\cos\theta$ con las funciones trigonométricas $y = sen\,\theta$ y $y = cos\,\theta$.	Reconoce las razones trigonométricas $sen\,\theta$ y $\cos\theta$, pero no las relaciona con las funciones trigonométricas $y = sen\,\theta$ y $y = cos\,\theta$.	Reconoce la relación entre las razones trigonométricas $sen\,\theta$ y $\cos\theta$ con las funciones trigonométricas $y = sen\,\theta$ y $y = cos\,\theta$

Anexo 9: Prueba Final:

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
JUVENIL NUEVO FUTURO

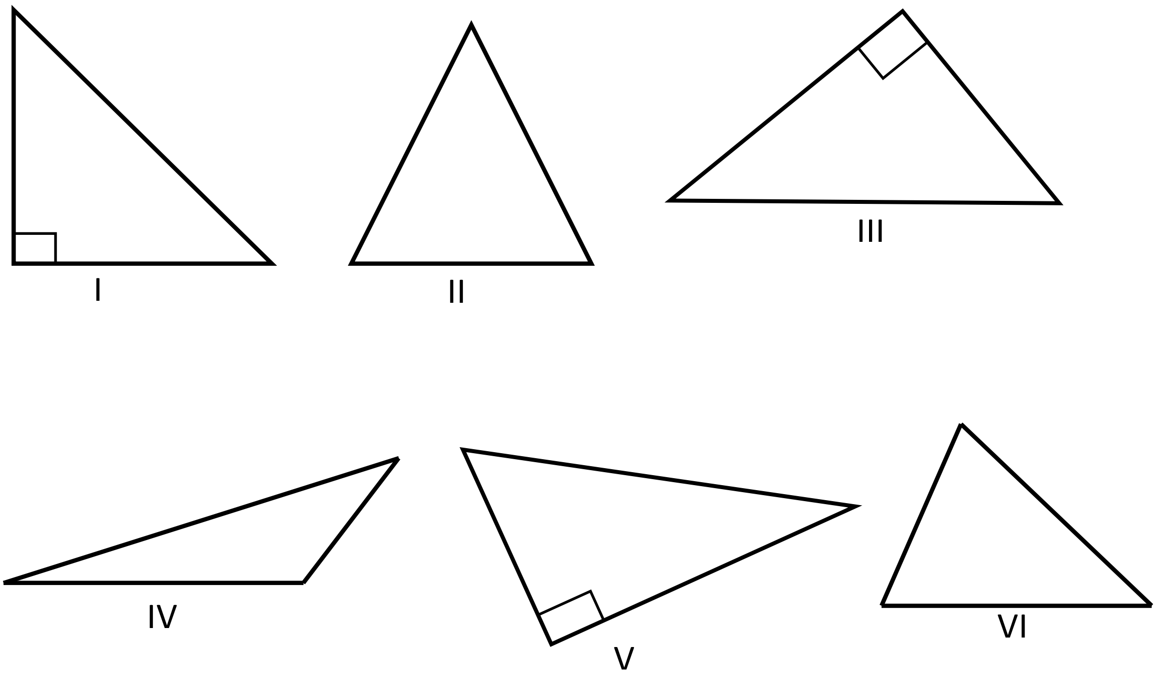
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PRUEBA FINAL

Docente: Alejandra Álvarez Bernal	Área Matemáticas
Nombre:	Grado: 10°1
Tema: Triángulo rectángulo, Teorema de Pitágoras, Razones, Proporciones y Razones trigonométricas	
Objetivo: Evidenciar el conocimiento aprendido	
Materiales: Lápiz, borrador.	
Tiempo estimado: 2 horas	

Preguntas de selección múltiple con única respuesta

Considérense los siguientes triángulos



1. De los triángulos anteriores son rectángulos:

a) II, IV y V
b) II, III y V
c) I, III y VI
d) I, III y V

¿Porque considera que son rectángulos?

2. Sólo una de las afirmaciones siguientes es correcta:

   a. Todo triángulo tiene catetos e hipotenusa.

   b. Sólo los triángulos rectángulos tienen catetos e hipotenusa.

   c. Algunos triángulos tienen tres catetos.

   d. Algunos triángulos tienen 2 hipotenusas y un cateto.

3. Cuál de los siguientes enunciados considera usted que relaciona el Teorema de Pitágoras

   a. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

   b. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

   c. En todo triángulo rectángulo la suma de los ángulos agudos es 90°.

   d. En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es menor que la suma de las longitudes de los catetos.

4. Cuál de las siguientes fórmulas considera usted que representa el teorema de Pitágoras, para el triángulo dado:

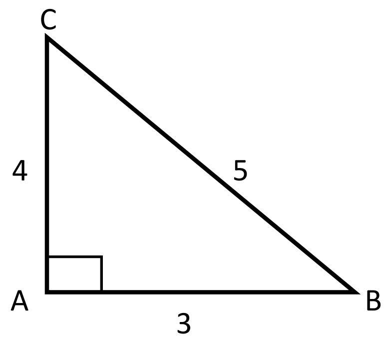
e) $a^2 + b^2 = c^2$

f) $m(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 90°$

g) $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180°$

h) $c < a + b$

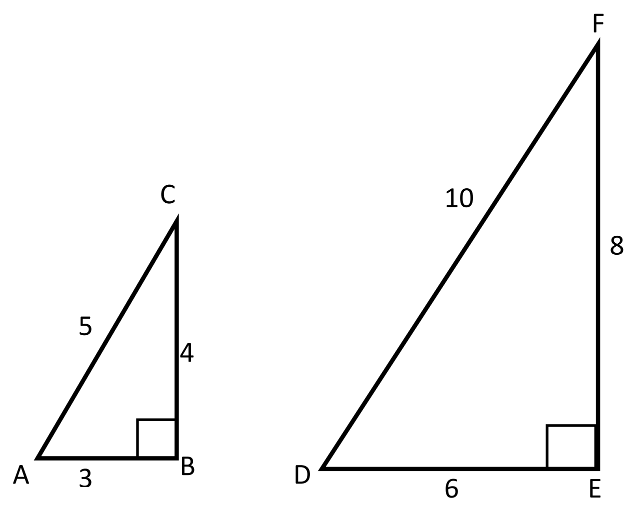
5. En el triángulo rectángulo dado



¿Cuál es la razón entre el cateto AB y la hipotenusa BC?

a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{5}{3}$ c. $\frac{4}{5}$ d. $\frac{5}{4}$

6. Considérense los siguientes triángulos



De acuerdo con lo observado en los triángulos puede afirmarse que:

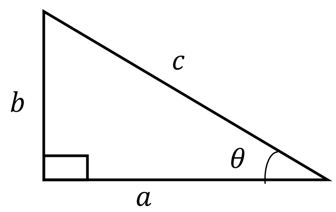
$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ Es una proporción, porque:

a. $6^2 + 8^2 = 10^2 \ y \ 3^2 + 4^2 = 5^2$

b. La razón entre los lados AB y DE es la misma que entre los lados AC y DF y es igual a $\frac{1}{2}$

c. $\frac{3}{6}\ y\ \frac{5}{10}$ son números racionales.
d. $\frac{3}{6}\ y\ \frac{5}{10}$ son razones entre lados del triángulo

Responda los numerales 7 y 8 de acuerdo con el siguiente triángulo.

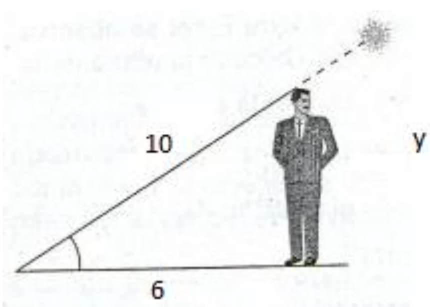


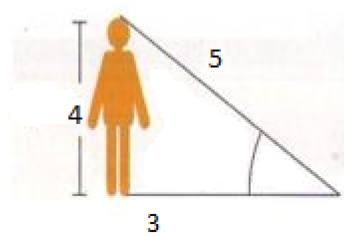
7. Si el $seno$ del ángulo θ se define como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, puede decirse que:

a. $sen\ \theta = \frac{b}{a}$ b. $sen\ \theta = \frac{a}{b}$ c. $sen\ \theta = \frac{b}{c}$ d. $sen\ \theta = \frac{a}{c}$

8. Si el $coseno$ del ángulo θ se define como la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa, puede afirmarse que:
a. $cos\ \theta = \frac{b}{c}$ b. $cos\ \theta = \frac{a}{c}$ c. $cos\ \theta = \frac{a}{b}$ d. $cos\ \theta = \frac{b}{a}$

Responde las preguntas 9 y 10 de acuerdo a las siguientes figuras





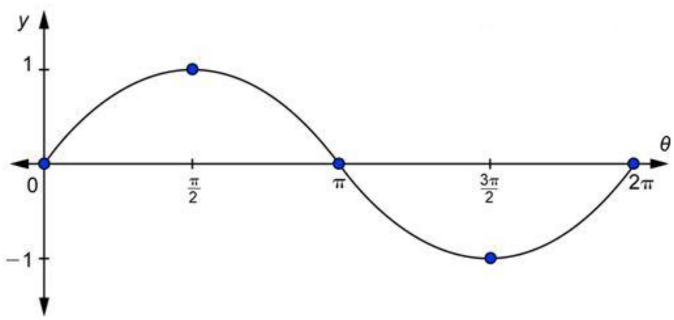
9. La razón entre la altura del niño y su sombra es la misma que entre la altura del hombre y su sombra. Esto puede escribirse como:

a. $\frac{4}{5} = \frac{y}{6}$ b. $\frac{4}{3} = \frac{y}{6}$ c. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ d. $\frac{6}{10} = \frac{4}{6}$

10. La altura del hombre es:

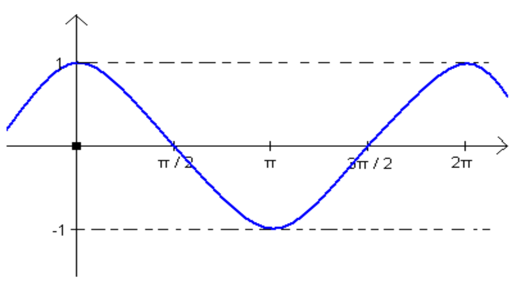
    a. $y = 11$ b. $y = 14$ c. $y = 8$ d. $y = 12$

11. El gráfico que se presenta a continuación representa a la función:



    a. $Cos\ \theta$ b. $sen\ \theta$ c. $tan\ \theta$

12. El gráfico que se presenta a continuación representa a la función:



    a. $Cos\ \theta$ b. $sen\ \theta$ c. $tan\ \theta$

Referencias

Adùriz-Bravo, A. (Enero-Junio de 2010). Aproximaciones històrico epistemològicas para la enseñanza de conceptos disciplinares. *EDUCyT*, 125-140.

Bachelard, G. (1993). *Formacion del espìritu cientìfico.* Mexico: Siglo XXI.

Boyer, C. B. (2007). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Caballero Soler, O. O. (2013). Una transición de la geometria a la trigonometria, utilizando problemas historicos de la astronomia como recurso didácticoen la clase de matemática. Bogotá, Colombia.

Chevallard, Y. (2002). *Transposiciòn didàctica: Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Delgado, C. A. (2003). El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de lo continuo en los clásicos griegos. *Matemáticas Enseñanza Universitaria, XI*(1,2), 91.

Diaz Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didactica*. Obtenido de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluacion

Garcia, Freddy, & Burgos, Sergio. (2018). *www.iejuvenilnuevofuturo.edu.co.*

Gonzalez Urbaneja, P. M. (noviembre de 2008). El Teorema llamado PItágoras. *SIGMA*, 103 - 130.

Gonzalez, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: La teoría de la proporción y el método de exhaución. *SIGMA: Revista de matemáticas*, 101-129.

Hawking, S. (2007). *Dios creó los números.* Barcelona: Crítica.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). *Como planificar la investigación acción.* Barcelona: Laertes.

Kline. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días,I.* Madrid: Alianza Editorial S-A-.

Kline. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Vol. II). Madrid: Alianza Editorial.

Kline. (2000). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre.* México: Siglo XXI.

Martínez-Sierra, G., & Poirier, F. B. (Mayo de 2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin American Journal of Physics Education, 2*(2), 201-208.

Mason, S. F. (2001). *Historia de las Ciencias: 1. La ciencia antigua, la ciencia en Oriente y en la Europa medieval.* Madrid: Alianza Editorial.

Matta, N. (2014). GeoGebra como herramienta para la enseñanza de Razones Trigonométricas en grado Décimo en la IED Leonardo Posada Pedraza . Bogotá.

Meavilla, & Canteras. (1984). *Viaje Gráfico por el Mundo de las Matemáticas* (Vol. III). Zaragoza: Editorial Universidad de Zaragoza.

Meavilla, V., & Canteras, J. A. (1984). *Viaje Gráfico por el Mundo de las Matemáticas* (Vol. I). Zaragoza: Editorial Universidad de Zaragoza.

MEN. (1994). *Ley General de Educación*. Obtenido de www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Delfin Ltda.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. Obtenido de www.colombiaaprende.edu.co//micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.* Mexico: Subsecretaría de Educación Media Superior.

Morales, C. (2017). Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría: Uso de un teodolito casero para medir ángulos de elevación y depresión y la aplicación de la ley de senos. *CIEMAC, IX*.

Moreira, M. A. (2002). Investigación en educación en Ciencias: Métodos Cualitativos. *Texto de apoyo N° 14: Actas del PIDEC*, 25-55.

Newman, J. (1994). *SGMA El mundo de las matemáticas.* Barcelona: Ediciones Grijalbo.

Newman, J. (1994). *SIGMA El mundo de las matemáticas* (Vol. 1). Barcelona: Ediciones Grijalbo.

Pérez, P. (2001). *Los Conceptos Matemáticos: Su Génesis y su Docencia.* Valencia: U.P.V.

Secretaria de Educacion de Medellin. (2014). *Expedicion curriculo: Plan de area de Matemàticas.* Medellìn: Impresos Begon S.A.S.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Èpistèmologiques Relatifs à la Notion de Limite. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, 5-67.

Vygotsky, L. (1986). *Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad media.* Madrid: Ediciones Akal S.A.

https://www.youtube.com/watch?v=VSCT8dsF14I

https://www.youtube.com/watch?v=zn6za_xWsVI